Fachhochschule Nordwestschweiz
Hochschule für Wirtschaft

Polynomgleichungen

Auflösung der Polynomgleichungen von Grad 2 bis 4 durch Wurzeln

Studie

Autor: Helmut Vetter
Ort, Datum: Arlesheim, 02.09.2014

Diese Arbeit wurde mit TexLive erstellt.

Polynomgleichungen
Auflösung der Polynomgleichungen von Grad 2 bis 4 durch Wurzeln

Autor
Vetter, Helmut
Schillerweg 2
CH-4144 Arlesheim
061 599 51 09
helmut.vetter@fhnw.ch

Auftraggeberschaft
Fachhochschule für Wirtschaft
Tanner, Christian

Arlesheim, September 2014

Ehrenwörtliche Erklärung
Ich versichere, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne Benutzung anderer als der im Literaturverzeichnis angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Die wörtlich oder inhaltlich den im Literaturverzeichnis aufgeführten Quellen und Hilfsmitteln entnommenen Stellen sind in der Arbeit als Zitat bzw. Paraphrase kenntlich gemacht.

Diese Arbeit ist noch nicht veröffentlicht worden. Sie ist somit weder anderen Interessenten zugänglich gemacht noch einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt worden.

Arlesheim, 02.09.2014

Helmut Vetter

Helmut Vetter

Management Summary

Jede/r kennt die berühmte Lösungsformel für die quadratische Gleichung $ax^2 + bx + x = 0$
$\Rightarrow x_{1/2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.
Der eine oder die andere weiss auch, dass es Lösungsformeln für Gleichungen dritten und vierten Grades gibt, dass aber die allgemeine Gleichung ab Grad 5 nicht mehr durch Wurzeln auflösbar ist.

Die wenigsten aber haben je eine allgemeine Gleichung dritten oder gar vierten Grades von Hand gelöst.

In diesem Paper werden Lösungsformeln für die Gleichungen 3. und 4. Grades hergeleitet und es wird nachgewiesen, dass durch diese jeweils alle Lösungen geliefert werden.

Im Anschluss an die Herleitungen wird die Verwendung der Lösungsformeln an Beispielen vorgeführt.

Um den Artikel zu verstehen, sollte man neben Schulalgebrakenntnissen auch Grundkenntnisse zum Thema Komplexe Zahlen haben.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1 Vor rund 180 Jahren legte Evariste Galois mit seiner Theorie über die Symmetrien der Nullstellen algebraischer Gleichungen die Grundlage, auf der gezeigt werden konnte, dass die allgemeine Polynomgleichung von Grad $n \geq 5$ nicht auflösbar ist, das heisst nicht durch fortlaufende Adjunktion von Wurzeln gelöst werden kann.

2 Ich gebe hier eine Zusammenstellung von Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen von Grad 2, 3 und 4 im Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$.

3 Die quadratische Gleichung wird in der gleichen Art reduziert, wie anschliessend die Gleichungen von Grad 3 und 4. Dies soll als Aufwärmen empfunden werden.

Die Gleichung 3. Grades wird mit dem Ansatz von Cardano $x = u + v$ gelöst. Allerdings rechne ich das v folgerichtiger direkt aus dem u.

Die Gleichung 4. Grades löse ich nach eigenem Ansatz als Produkt zweier quadratischer Funktionen.

Ich weise für alle 3 Grade (2 bis 4) durch explizite Rechnung nach, dass man jeweils genau alle Lösungen gefunden hat. Auch hier ist der quadratische Fall analog behandelt.

4 Bemerkung: Unter $\sqrt[p]{z}$ wird diejenige der p komplexen Wurzeln w mit $w^p = z$ verstanden, die kleinstes Argument $\arg(w) \in [0, 2\pi[$ hat.
Für $z = 0$ ist $\sqrt[p]{0} = 0$.

5 Gleichungen der Form $\sqrt[p]{ab} = \sqrt[p]{a} \cdot \sqrt[p]{b}$ sind dann nur modulo Faktoren $e^{\frac{2\pi i}{p}}$ gültig.
Beispielsweise: $\sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{1} = 1$ wohingegen $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = i \cdot i = -1$.
Modulo Faktor $e^{\frac{2\pi i}{p}} = e^{\frac{2\pi i}{2}} = e^{\pi i} = -1$ sind die beiden Resultate äquivalent.

2 Die Quadratische Gleichung

6 Die allgemeine quadratische Gleichung hat die Form $ax^2 + bx + c = 0$, mit $a \neq 0$.

7 Lösung
(GL1): $\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$ Division durch a

8 $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ Substitution $x = y - \frac{b}{2a}$

$$(y - \frac{b}{2a})^2 + \frac{b}{a}(y - \frac{b}{2a}) + \frac{c}{a} = 0$$
$$y^2 - \frac{b}{a}y + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{b}{a}y - \frac{b^2}{2a^2} + \frac{c}{a} = 0$$
$$y^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

9 Definiere $p := -\frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = \frac{4ac - b^2}{4a^2}$
(GL2): $\boxed{y^2 + p = 0}$

10 Via Substitution $x = y - \dfrac{b}{2a}$ ergibt sich eine Bijektion zwischen den Lösungen x von (GL1) und y von (GL2).

11 Umformen von (GL2):
$y^2 + p = 0 \qquad | - p$
$y^2 = -p$

12 Definiere:
$u := \sqrt{-p}$
$y_1 = u,\ y_2 = -u$

13 Den Nachweis, dass man mit u und $-u$ alle Lösungen von (GL2) gefunden hat, liefert die Identität $(y-u)(y+u) = y^2 - u^2 = y^2 - (\sqrt{-p})^2 = y^2 - (-p) = y^2 + p$ qed.
Dabei wurde die Identität $(\sqrt{T})^2 = T$ benutzt.
Beachte: Im Gegensatz dazu gilt $\sqrt{T^2} = T$ nur modulo Faktor -1.

14 <u>Beispiel</u> $\boxed{x^2 + 2x + 6 = 0}$

$a = 1,\ b = 2,\ c = 6$
$p = \dfrac{4ac - b^2}{4a^2} = 5$
$u = \sqrt{-p} = 2.23606798i$
$y_1 = u = 2.23606798i,\ y_2 = -u = -2.23606798i$
$x_1 = y_1 - \dfrac{b}{2a} = \underline{\underline{-1 + 2.23606798i}},\ x_2 = y_2 - \dfrac{b}{2a} = \underline{\underline{-1 - 2.23606798i}}$

3 Die Kubische Gleichung

15 Die allgemeine kubische Gleichung hat die Form $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, mit $a \neq 0$.

16 <u>Lösung</u>

(GL1): $\boxed{ax^3 + bx^2 + cx + d = 0}$ Division durch a

17 $x^3 + \dfrac{b}{a}x^2 + \dfrac{c}{a}x + \dfrac{d}{a} = 0$ Substitution $x = y - \dfrac{b}{3a}$

$(y - \dfrac{b}{3a})^3 + \dfrac{b}{a}(y - \dfrac{b}{3a})^2 + \dfrac{c}{a}(y - \dfrac{b}{3a}) + \dfrac{d}{a} = 0$

$y^3 - 3\dfrac{b}{3a}y^2 + 3\dfrac{b^2}{9a^2}y - \dfrac{b^3}{27a^3} + \dfrac{b}{a}y^2 - 2\dfrac{b^2}{3a^2}y + \dfrac{b^3}{9a^3} + \dfrac{c}{a}y - \dfrac{bc}{3a^2} + \dfrac{d}{a} = 0$

$y^3 + \dfrac{3ac - b^2}{3a^2}y + \dfrac{27a^2d - 9abc + 2b^3}{27a^3} = 0$

18 Definiere $p := \dfrac{3ac - b^2}{3a^2}$, $q := \dfrac{27a^2d - 9abc + 2b^3}{27a^3}$

(GL2): $\boxed{y^3 + py + q = 0}$

19 Via Substitution $x = y - \dfrac{b}{3a}$ ergibt sich eine Bijektion zwischen den Lösungen x von (GL1) und y von (GL2).

20 Setze $y = u + v$
$(u+v)^3 + p(u+v) + q = 0$
$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + pu + pv + q = (u^3 + v^3 + q) + (u+v)(3uv + p) = 0$

21 Die Gleichung ist sicher erfüllt, wenn gilt:
(I) $u^3 + v^3 + q = 0$ und (II) $3uv + p = 0$

22 (II) $3uv + p = 0 \Rightarrow v = -\dfrac{p}{3u}$, falls $u \neq 0$

Eingesetzt in (I): $u^3 - \dfrac{p^3}{27u^3} + q = 0 \Rightarrow u^6 + qu^3 - \dfrac{p^3}{27} = 0$

Substitution: $z := u^3 \Rightarrow z^2 + qz - \dfrac{p^3}{27} = 0 \Rightarrow z = \sqrt{\dfrac{q^2 + 4\frac{p^3}{27}}{4}} - \dfrac{q}{2} = \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3} - \dfrac{q}{2}$ gemäss Lösung 1 der quadratischen Gleichung.

23 Definiere $u := \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{\sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3} - \frac{q}{2}}$

24 Bezeichne $j := e^{2\pi i/3}$ die dritte Einheitswurzel im 2. Quadranten der komplexen Zahlebene.

25 Definiere:
Fall 1: $u \neq 0$: $y_1 = u - \frac{p}{3u}$, $y_2 = ju - \frac{p}{3ju} = ju - j^2\frac{p}{3u}$, $y_3 = j^2u - \frac{p}{3j^2u} = j^2u - j\frac{p}{3u}$
Fall 2: $u = 0 \Rightarrow$ via Gleichung (II) $p = 0$. Dies ergibt die reinkubische Gleichung: $y^3 + q = 0$ mit den drei Lösungen $y_1 = \sqrt[3]{-q}$, $y_2 = j\sqrt[3]{-q}$, $y_3 = j^2\sqrt[3]{-q}$

26 Den Nachweis, dass man mit y_1, y_2 und y_3 alle Lösungen von (GL2) gefunden hat, liefern die Identitäten:
Fall 1: $(y - u + \frac{p}{3u})(y - ju + j^2\frac{p}{3u})(y - j^2u + j\frac{p}{3u}) =$

$$y^3 + y^2(-j^2u + j\frac{p}{3u} - ju + j^2\frac{p}{3u} - u + \frac{p}{3u})+$$
$$y(j^3u^2 - j^2\frac{p}{3} - j^4\frac{p}{3} + j^3\frac{p^2}{9u^2} + j^2u^2 - j\frac{p}{3} - j^2\frac{p}{3} + j\frac{p^2}{9u^2} + ju^2 - j^2\frac{p}{3} - j\frac{p}{3} + j^2\frac{p^2}{9u^2})+$$
$$(-j^3u^3 + j^2\frac{pu}{3} + j^4\frac{pu}{3} - j^3\frac{p^2}{9u} + j^3\frac{pu}{3} - j^2\frac{p^2}{9u} - j^4\frac{p^2}{9u} + j^3\frac{p^3}{27u^3}) =$$
$$y^3 + y^2\underbrace{(1 + j + j^2)}_{=0}(-u + \frac{p}{3u}) + y((u^2 - \frac{p^2}{9u^2})\underbrace{(1 + j + j^2)}_{=0} + 3\underbrace{(-j - j^2)}_{=1}\frac{p}{3})+$$
$$(-u^3 + (\frac{pu}{3} - \frac{p^2}{9u})\underbrace{(1 + j + j^2)}_{=0} + \frac{p^3}{27u^3}) = y^3 + py - \frac{u^6 - (\frac{p}{3})^3}{u^3} = y^3 + py + q \text{ qed.}$$

Fall 2: $(y - \sqrt[3]{-q})(y - j\sqrt[3]{-q})(y - j^2\sqrt[3]{-q}) =$

$$y^3 - y^2(j^2\sqrt[3]{-q} + j\sqrt[3]{-q} + \sqrt[3]{-q}) + y(j^3(\sqrt[3]{-q})^2 + j^2(\sqrt[3]{-q})^2 + j(\sqrt[3]{-q})^2) - j^3(\sqrt[3]{-q})^3 =$$
$$y^3 - y^2\sqrt[3]{-q}\underbrace{(j^2 + j + 1)}_{=0} + y(\sqrt[3]{-q})^2\underbrace{(1 + j^2 + j)}_{=0} - (-q) = y^3 + q \text{ qed.}$$

27 Dabei wurden folgende Identitäten benutzt:
1) $(\sqrt{T})^2 = T$
2) $(\sqrt[3]{T})^3 = T$
3) $j^3 = 1$ und $j^4 = j$
4) $1 + j + j^2 = \frac{j^3 - 1}{j - 1} = \frac{1 - 1}{j - 1} = 0$ und $-j - j^2 = 1$
5) $\frac{u^6 - (\frac{p}{3})^3}{u^3} = \frac{\left(\sqrt[3]{\sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3} - \frac{q}{2}}\right)^6 - (\frac{p}{3})^3}{\left(\sqrt[3]{\sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3} - \frac{q}{2}}\right)^3} = \frac{\left(\left(\sqrt[3]{\sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3} - \frac{q}{2}}\right)^3\right)^2 - (\frac{p}{3})^3}{\sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3} - \frac{q}{2}} =$

$$= \frac{(\sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3} - \frac{q}{2})^2 - (\frac{p}{3})^3}{\sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3} - \frac{q}{2}} = \frac{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3 - 2\frac{q}{2}\sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3} + (\frac{q}{2})^2 - (\frac{p}{3})^3}{\sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3} - \frac{q}{2}} =$$
$$= \frac{2(\frac{q}{2})^2 - 2\frac{q}{2}\sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}}{\sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3} - \frac{q}{2}} = \frac{q(\frac{q}{2} - \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3})}{\sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3} - \frac{q}{2}} = -q$$

28 Beispiel $\boxed{x^3 + 4x^2 + 5x - 2 = 0}$

$a = 1,\ b = 4,\ c = 5,\ d = -2$

$p = \dfrac{3ac - b^2}{3a^2} = -0.33333333,\ q = \dfrac{27a^2d - 9abc + 2b^3}{27a^3} = -3.92592593$

$u = \sqrt[3]{\sqrt{(\frac{p}{3})^3 + (\frac{q}{2})^2} - \frac{q}{2}} = 1.57749436$

$j = -0.5 + 0.8660254i,\ j^2 = -0.5 - 0.8660254i$

$y_1 = u - \dfrac{p}{3u} = 1.64792955,\ y_2 = ju - j^2\dfrac{p}{3u} = -0.82396477 + 1.30515153i$

$y_3 = j^2u - j\dfrac{p}{3u} = -0.82396477 - 1.30515153i$

$x_1 = y_1 - \dfrac{b}{3a} = \underline{\underline{0.31459621}},\ x_2 = y_2 - \dfrac{b}{3a} = \underline{\underline{-2.15729811 + 1.30515153i}}$

$x_3 = y_3 - \dfrac{b}{3a} = \underline{\underline{-2.15729811 - 1.30515153i}}$

4 Die Quartische Gleichung

29 Die allgemeine quartische Gleichung hat die Form $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, mit $a \neq 0$.

30 Lösung

(GL1): $\boxed{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0}$ Division durch a

31 $x^4 + \frac{b}{a}x^3 + \frac{c}{a}x^2 + \frac{d}{a}x + \frac{e}{a} = 0$ Substitution $x = y - \frac{b}{4a}$

$(y - \frac{b}{4a})^4 + \frac{b}{a}(y - \frac{b}{4a})^3 + \frac{c}{a}(y - \frac{b}{4a})^2 + \frac{d}{a}(y - \frac{b}{4a}) + \frac{e}{a} = 0$

$y^4 - 4\frac{b}{4a}y^3 + 6\frac{b^2}{16a^2}y^2 - 4\frac{b^3}{64a^3}y + \frac{b^4}{256a^4} + \frac{b}{a}y^3 - 3\frac{b^2}{4a^2}y^2 + 3\frac{b^3}{16a^3}y - \frac{b^4}{64a^4} + \frac{c}{a}y^2 - 2\frac{bc}{4a^2}y + \frac{b^2c}{16a^3} +$
$\frac{d}{a}y - \frac{bd}{4a^2} + \frac{e}{a} = 0$

$y^4 + \dfrac{8ac - 3b^2}{8a^2}y^2 + \dfrac{8a^2d - 4abc + b^3}{8a^3}y + \dfrac{256a^3e - 64a^2bd + 16ab^2c - 3b^4}{256a^4} = 0$

32 Definiere $p := \dfrac{8ac - 3b^2}{8a^2},\ q := \dfrac{8a^2d - 4abc + b^3}{8a^3},\ r := \dfrac{256a^3e - 64a^2bd + 16ab^2c - 3b^4}{256a^4}$

(GL2): $\boxed{y^4 + py^2 + qy + r = 0}$

33 Via Substitution $x = y - \dfrac{b}{4a}$ ergibt sich eine Bijektion zwischen den Lösungen x von (GL1) und y von (GL2).

34 • Im Fall $q = 0$ ergibt sich die Faktorisierung
$y^4 + py^2 + r = (y^2 - z_1)(y^2 - z_2) = (y - \sqrt{z_1})(y + \sqrt{z_1})(y - \sqrt{z_2})(y + \sqrt{z_2})$,
wo z_1 und z_2 die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung $z^2 + pz + r = 0$ sind.
• Im Fall $r = 0$ ergibt sich die Faktorisierung $y^4 + py^2 + qy = y \cdot (y^3 + py + q)$ was auf die Lösung $y = 0$ und die drei Lösungen der kubischen Gleichung $y^3 + py + q = 0$ hinausläuft.
• Im Fall $q \neq 0$ und $r \neq 0$ führt der Ansatz
(GL3): $\boxed{y^4 + py^2 + qy + r = (y^2 + sy + t)(y^2 - sy + \frac{r}{t})}$ via Koeffizientenvergleich bei y^2 und y auf die beiden Gleichungen:
(I) $\dfrac{r}{t} - s^2 + t = p$ und (II) $\dfrac{rs}{t} - st = q$

35 Gelingt es ein Lösungspaar $(s, t \neq 0)$ dieses Gleichungssystems zu finden so gelingt es (GL2) gemäss Gleichung (GL3) auf die Lösung zweier quadratischer Gleichungen $y^2 + sy + t = 0$ bzw. $y^2 - sy + \frac{r}{t} = 0$ zu reduzieren.

36 Multipliziert man Gleichung (I) mit $(-s)$ und addiert das Produkt zu Gleichung (II), so erhält man:
$s^3 - 2st = -ps + q$, was für $s \neq 0$ $\;t = \frac{s^3+ps-q}{2s}$ zur Folge hat.

37 Eingesetzt in Gleichung (I) ergibt sich:
$\dfrac{s^3+ps-q}{2s} - s^2 + \dfrac{2rs}{s^3+ps-q} = p$ multipliziert mit $2s \cdot (s^3+ps-q)$:
$s^6 + s^2p^2 + q^2 + 2ps^4 - 2qs^3 - 2pqs - 2s^6 - 2ps^4 + 2qs^3 + 4rs^2 = 2ps^4 + 2p^2s^2 - 2pqs$
$s^6 - 2s^6 + 2ps^4 - 2ps^4 - 2ps^4 - 2qs^3 + 2qs^3 + p^2s^2 + 4rs^2 - 2p^2s^2 - 2pqs + 2pqs + q^2 = 0$
$-s^6 - 2ps^4 + (-p^2 + 4r)s^2 + q^2 = 0$ multipliziert mit -1 also:
(GL4): $\boxed{s^6 + 2ps^4 + (p^2 - 4r)s^2 - q^2 = 0}$

38 Substitution $z = s^2$ führt auf die Kubische Gleichung:
$z^3 + 2pz^2 + (p^2 - 4r)z - q^2 = 0$ davon ermittelt man eine Lösung z.

39 $q \neq 0 \Rightarrow z \neq 0 \Rightarrow s = \sqrt{z} \neq 0$
$r \neq 0$ und $s \neq 0 \Rightarrow t = \frac{s^3+ps-q}{2s} \neq 0$, weil

$$\frac{s^3+ps-q}{2s} \cdot (s^3+ps+q) = \frac{s^6+2ps^4+p^2s^2-q^2}{2s} = \frac{\overbrace{s^6+2ps^4+(p^2-4r)s^2-q^2}^{\text{GL4}}+4rs^2}{2s} = \frac{4rs^2}{2s} = 2rs \neq 0$$

40 Jetzt wird explizit nachgewiesen, dass das Paar $(s, t = \dfrac{s^3+ps-q}{2s})$ die Gleichungen I und II erfüllt:

(I) $\dfrac{r}{t} - s^2 + t = \dfrac{2rs}{s^3+ps-q} - s^2 + \dfrac{s^3+ps-q}{2s} = \dfrac{4rs^2 - 2s^3(s^3+ps-q) + (s^3+ps-q)^2}{2s(s^3+ps-q)} =$

$$\frac{4rs^2 - 2s^6 - 2ps^4 + 2qs^3 + s^6 + p^2s^2 + q^2 + 2ps^4 - 2qs^3 - 2pqs}{2s(s^3+ps-q)} = \frac{-s^6 + (4r+p^2)s^2 - 2pqs + q^2}{2s(s^3+ps-q)} =$$

$$\frac{-\overbrace{(s^6+2ps^4+(p^2-4r)s^2-q^2)}^{=0,\text{ gemäss GL4}}+2ps(s^3+ps-q)}{2s(s^3+ps-q)} = p \quad \text{qed.}$$

(II) $\dfrac{rs}{t} - st = \dfrac{2rs^2}{s^3+ps-q^2} - \dfrac{s(s^3+ps-q)}{2s} = \dfrac{4rs^2 - s^6 - p^2s^2 - q^2 - 2ps^4 + 2qs^3 + 2pqs}{2(s^3+ps-q)} =$

$$\frac{-\overbrace{(s^6+2ps^4+(p^2-4r)s^2-q^2)}^{=0,\text{ gemäss GL4}}+2q(s^3+ps-q)}{2(s^3+ps-q)} = q \quad \text{qed.}$$

41 <u>Beispiel</u> $\boxed{x^4 + 4x^3 + 5x^2 - 2x + 8 = 0}$
$x^4 + 4x^3 + 5x^2 - 2x + 8 = 0$ $a = 1$, $b = 4$, $c = 5$, $d = -2$, $e = 8$
$p = \dfrac{8ac - 3b^2}{8a^2} = -1$, $q = \dfrac{8a^2d - 4abc + b^3}{8a^3} = -4$, $r = \dfrac{256a^3e - 64a^2bd + 16ab^2c - 3b^4}{256a^4} = 12$
$s^6 - 2s^4 - 47s^2 - 16 = 0$
$z^3 - 2z^2 - 47z - 16 = 0$
$z = 8.06984372$
$s = \sqrt{z} = 2.84074704$, $t = \dfrac{s^3+ps-q}{2s} = 4.23896202$
Faktorisiert als $(x^2 + 2.84074704x + 4.23896202)(x^2 - 2.84074704x + 2.8308817)$
$y_1 = -1.42037352 + 1.49047009i$, $y_2 = -1.42037352 - 1.49047009i$
$y_3 = 1.42037352 + 0.90189842i$, $y_4 = 1.42037352 - 0.90189842i$
$x_1 = y_1 - \dfrac{b}{4a} = \underline{\underline{-2.42037352 + 1.49047009i}}$, $x_2 = y_2 - \dfrac{b}{4a} = \underline{\underline{-2.42037352 - 1.49047009i}}$
$x_3 = y_3 - \dfrac{b}{4a} = \underline{\underline{0.42037352 + 0.90189842i}}$, $x_4 = y_4 - \dfrac{b}{4a} = \underline{\underline{0.42037352 - 0.90189842i}}$

Literaturverzeichnis

Gellert, W. / Küstner, H. / Hellwich, M. / Kästner, H. / Reichardt H. (1977): Kleine Enzyklopädie Mathematik. 10., völlig überarbeitete Auflage. Leipzig: VEB Verlag Enzyklopädie