

# Mit Körpereinsatz den Zahlenstrahl erschließen

Dominique Högger und Thomas Royar

Vielen Menschen erscheint die Zahlenreihe als räumliches Bild vor dem inneren Auge, Rechenschritte werden als Bewegungen in einem virtuellen Raum vorgestellt. Dies legt nahe, Körper- und Raumorientierung gezielt zu nutzen, um die Vorstellung von Zahlen breiter zu verankern und besser zu vernetzen.

## Bildhaftes Denken

Für die Ausbildung mathematischer Begriffe, die zwar abstrakter Natur sind, aber dennoch in Bezug zu konkreten Phänomenen stehen, ist es förderlich, dass sich die Lernenden etwas vorstellen können.

Innere Bilder begünstigen den Aufbau kognitiver Strukturen.

Zahlenvorstellungen von Kindern (und Erwachsenen) zeigen sich etwa in der Form von Zahlenleitern und Zahlenstrahlen, Kreisen und Spiralen, Zick-Zack- und Wellenmustern etc., wie die Abbildung 1 illustriert. Trotz ihrer Unterschiedlichkeit beruhen alle Vorstellungen auf einer räumlich vorgestellten Anordnung der Zahlen entlang der Zahlenreihe.

Quantitative Aspekte sind damit in räumlichen Beziehungen repräsentiert: Zahlen haben buchstäblich „kleine“ und „große“ Abstände, sie liegen „zwischen“, „vor“ oder „hinter“ anderen Zahlen, arithmetische Opera-

## Innere Bilder begünstigen den Aufbau kognitiver Strukturen.

tionen werden als Bewegung in diesem Raum interpretiert (Lorenz 1992, S. 56, S. 138).

Innere Bilder machen Erfahrungen unabhängig von Sprache kognitiv verfügbar (Royar 2013, S. 64). Sie enthalten Informationen, von denen Wissen abgeleitet werden kann, sind

also wie die Sprache eine „Modalität des Denkens“ (Lorenz 1992, S. 47ff.).

Innere Bilder sind zunächst noch stark an reale Handlungen gebunden. Als didaktisch-methodische Konsequenz ergibt sich daraus, nicht primär auf statischen Bildern aufzubauen, sondern auf selbst ausgeführtem Handeln. Das Hantieren zum Beispiel mit Gegenständen zielt stets darauf ab, dass sich das Kind visuell erinnern kann (ebd., S. 75f., S. 87).

## Begehbare Zahlenreihen

Der Zahlenstrahl ist ein gängiges Anschauungsmittel des Mathematik-

## Innere Bilder bauen auf selbst ausgeführtem Handeln auf.

unterrichts, vor allem in Form von Abbildungen in Büchern oder auf Arbeitsblättern. Es soll nun vor allem das Potenzial beleuchtet werden, das großflächige, begehbare Zahlenreihen mit sich bringen. Als „begehbare Zahlenreihe“ soll eine mit Ziffernsymbolen markierte Strecke bezeichnet werden, die folgende Kriterien erfüllt:

- Die Symbole haben gleiche Abstände und folgen der numerischen Reihenfolge.
- Ein Kind kann sich so platzieren, dass es klar erkennen kann, bei welcher „Zahl“ es sich befindet.
- Kinder können in benachbarten Abschnitten stehen, ohne sich zu behindern.

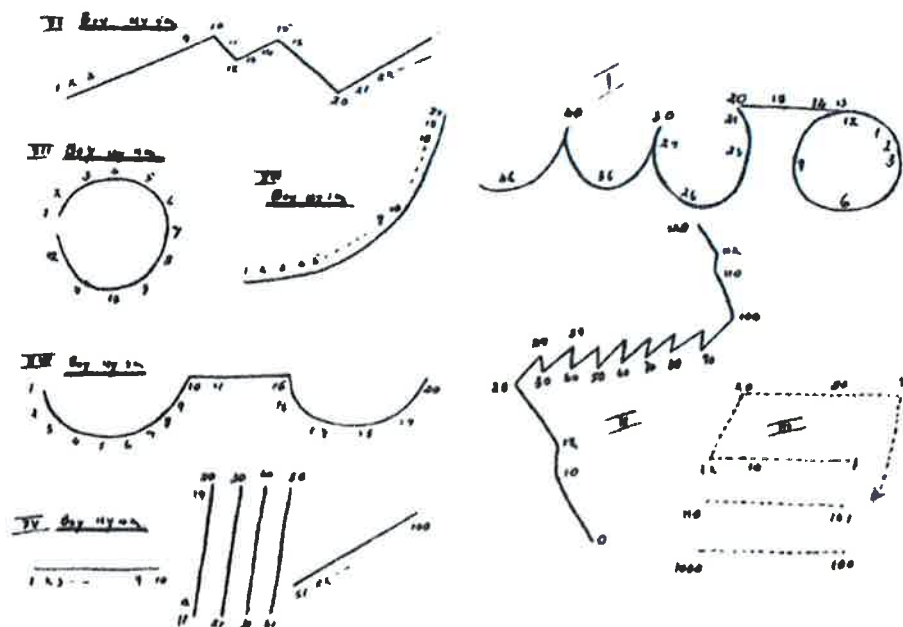


Abb. 1: Vielfalt an Zahlenraumvorstellungen

Morton 1936, entnommen aus Lorenz 1992

- Kinder können mit einem Schritt von einer „Zahl“ zur nächsten wechseln.

Nebensächlich ist dabei, ob die Reihe mit „Zahlenfliesen“, durch Markierungen auf Treppenstufen oder durch Markierungen auf ebenem Boden erzeugt wird. Auch die Frage, ob die Reihe bei 0 oder 1 beginnt und wie weit sie reicht, ist in diesem Kontext unerheblich. Darüber hinaus ist denkbar, dass je nach bearbeitetem Aspekt ausgewählte Abschnitte gesondert (z. B. farblich) hervorgehoben werden, um zum Beispiel gerade Zahlen oder Zehnerzahlen zu markieren.

Zahlen sind für viele Kinder interessant, und begehbbare Zahlenreihen üben auf sie eine gewisse Faszination aus. Schon im Kindergarten lassen sich begehbbare Zahlenreihen ohne großen Aufwand gestalten. Die Erfahrungen zeigen, dass sich viele Kinder quasi automatisch damit zu beschäftigen beginnen und auf diese Art spielerisch Erfahrungen mit Zahlen und deren Reihung sammeln. Dieses „Spiel“ lässt sich in der Grundschule fortsetzen: Die Lernenden beschäftigen sich zunächst frei auf und mit einer begehbbaren Zahlenreihe; sie stellen dabei Fragen, beschreiben Entdeckungen und formulieren Vermutungen. Sie sollten mit eigenen Worten beschreiben können, welche Sachverhalte und Zusammenhänge sie erkennen. Damit stellen sie Bezüge zwischen bildhaftem und sprachlichem Denken her. Selbst Kinder, die Zahlen schon gut kennen, lassen sich für solch spielerische und entdeckende Arrangements begeistern.

Bleiben begehbbare Zahlenreihen über längere Zeit im Klassenzimmer oder im öffentlichen Bereich des Schulhauses bestehen, ist eine beiläufige Wahrnehmung im Vorbeigehen oder die selbstgewählte spielerische Auseinandersetzung in Pausenzeiten möglich.

Spezifische Aufgabenstellungen können sich anschließen, falls die Kinder sie nicht schon selber erkannt und erprobt haben, beispielsweise vorwärts, rückwärts oder in 2er-Schritten

über die Zahlenreihe zu schreiten und die betretenen Zahlen vernehmlich zu benennen. Je nach Voraussetzungen der Klasse bzw. einzelner Kinder lassen sich Aufgabenstellungen geführt mit der ganzen Klasse durchführen und als Einzel- oder Kleingruppenaufträge in Werkstätten integrieren. Auch die Arbeit mit einem einzelnen Kind, um es in bestimmten Fragen spezifisch zu unterstützen, ist möglich. Bei der weiteren Entwicklung des Schulstoffes kann die Arbeit mit begehbbaren Zahlenreihen laufend fortgesetzt werden. So können die Lernenden stets an bekannten Vorstellungen anknüpfen und diese weiter differenzieren und ausbauen.

### Die Vorteile begehbarer Zahlenreihen

Begehbbare Zahlenreihen haben gegenüber kleinräumigen Abbildungen mehrere Vorteile (Högger 2013, 39 ff.):

- Das konkrete Handeln erleichtert die Auseinandersetzung mit dem Inhalt:** Konkretes Handeln ist einfacher zu erklären und zu vollziehen als bloßes „mentales Operieren“. Sich in einer großen Abbildung am Boden zu positionieren, ist bereits eine solche Handlung. Die Entsprechung an einer analogen Abbildung in einem Buch wäre es, sich visuell auf den entsprechenden Punkt zu konzentrieren. Visuelle Konzentration aber ist flüchtig. Die Positionierung im Raum unterstützt deshalb dabei, sich auf einen bestimmten Punkt oder eine bestimmte Perspektive zu fokussieren, ohne dabei zwingend bereits den nächsten Schritt zu vergegenwärtigen.
- Körper- und Raumorientierung ermöglichen zusätzliche Wahrnehmungen:** Körperliche Aktivitäten und räumliche Orientierung ermöglichen, Informationen wahrzunehmen und passende innere Vorstellungsbilder aufzubauen. Das Kind kann beispielsweise – ausgehend von einer bestimmten Position auf dem Zahlenstrahl – fragen:



Abb. 2: Vorstellungen können Mittler zwischen realer und mentaler Handlung sein.

- Welche Zahlen liegen nahe, welche weiter weg?
- Welche Zahlen liegen vor, welche hinter mir?
- Was verändert sich, wenn ich vorwärts schreite?

Solche Wahrnehmungen sind an einem kleinräumigen Zahlenstrahl nicht möglich, denn die ganze Abbildung liegt vor dem Kind und alle Einzelteile sind etwa gleich weit entfernt. Raum-Lage-Bezeichnungen wie zum Beispiel *am Anfang, oben* oder *weit entfernt* erhalten an großflächigen Abbildungen eine konkrete Bedeutung und können unmittelbar nachvollzogen, verstanden und in Erinnerung behalten werden.

- Die Kombination von Wahrnehmung und Handlung führt zu zusätzlichen Erinnerungsankern:** Durch die Kombination von Wahrnehmung und Handlung werden die Informationen im Hirn breiter verarbeitet. Die körperliche Aktivität und die damit veranschaulichten inhaltlichen Bedeutungen ermöglichen je eigenständige Erinnerungsanker, die aber miteinander verknüpft sind. Dank dieser Verknüpfung kann die Wiederholung der körperlichen Betätigung (oder schon nur der Gedanke daran) die inhaltlichen Bedeutungen in Erinnerung rufen – und umgekehrt.
- Die Aufgabenbearbeitung ist beobachtbar:** Das konkrete Handeln an großflächigen Zahlenraumdarstellungen ist beobachtbar. Lehrpersonen können daraus ableiten,





Abb. 3: Verschiedene Varianten von Zahlenraumdarstellungen

Fotos: Brigitte Wälfl, Dominique Högger

welches Vorwissen und welche Lösungsstrategien die Kinder haben. Hingegen sind solche Beobachtungen weniger konkret, wenn die Kinder vor einem Aufgabenblatt oder einem Buch sitzen und eine Aufgabe „bloß“ mental bearbeiten. Analog haben die Lernenden eine bessere Selbstkontrolle über ihr Handeln und Verstehen.

### Beispiele für Aufgaben

#### „Vorgänger“ und „Nachfolger“ wörtlich genommen

Die Bezeichnungen „Vorgänger“ und „Nachfolger“ natürlicher Zahlen verweisen gleichermaßen auf die zeitliche Reihenfolge im (Vorwärts-)Zählvorgang (die 4 „kommt vor“ der 5, die 6 „folgt“ dieser nach) als auch auf eine räumliche. Pseudokontextuierte Zahlenreihen in der Form von beispielsweise Eisenbahnzügen oder Raupen implizieren teilweise eine Bewegung der Zahlenreihe selbst, während auf

Papier gedruckte Zahlenreihen nahezu ausschließlich von links nach rechts gelesen werden, sodass z. B. Additionen mit „gehe nach rechts“ und Subtraktionen mit „gehe nach links“ assoziiert werden.

Hier kann der eigene körperliche Bezug einen unterstützenden Beitrag leisten: Beim Ablaufen der Reihe von niedrig nach hoch kommt man beVOR man eine Zahl trifft auf deren VORGänger und daNACH zu deren NACHfolger. Den Vorgänger hat man in der Vergangenheit betreten, den Nachfolger wird man in der Zukunft erreichen. An jeder Stelle kann man Vorgänger und Nachfolger in Beziehung setzen. Dass dabei die Regel gilt, dass „vor“ und „nach“ nur im Kontext des „Vorwärtslaufens“ sinnvoll so definiert sind (und sich beim „Rückwärtslaufen“ ins Gegenteil verkehrt), sollte bewusst gemacht werden und ist somit ein Hinweis darauf, dass mathematische Begriffe keine universellen „Wahrheiten“ sind, sondern auf Konventionen beruhen.

Vorteile einer begehbaren Zahlenreihe zeigen sich zum Beispiel an folgenden Aufgabenstellungen:

- Was ist weiter weg von 7 : 9 oder 3?
- Was ist gleich weit von 4 entfernt wie 1?
- Was ist gleich weit von 3 und 7 entfernt?

Zur Bearbeitung der Aufgabe stellen sich die Lernenden auf die begehbare Zahlenreihe und orientieren sich an ihren unmittelbaren Wahrnehmungen. Erweist sich das Abschätzen solcher Distanzen und deren Differenzen als schwierig, können zusätzliche Hilfsmittel zugezogen werden, beispielsweise Stäbe in ausgesuchten Längen.

Diese Arbeit lässt sich schließlich fortsetzen mit Additions- und Subtraktionsaufgaben, zum Beispiel  $5 + 2$ : Die Lernenden stellen sich auf das Feld 5, machen zwei Schritte vorwärts und lesen das Resultat ab. Dass dieser Vorgang weitgehend einem zählenden Rechnen entspricht, ist an dieser

Stelle nicht erheblich. Ziel ist in erster Linie, dass die Lernenden eine Zahlenraumvorstellung als inneres Bild aufbauen, nicht, dass sie Rechenprozesse zuvorderst als Zählprozesse deuten. Um nicht auf das Zählen der Schritte zu fokussieren, sondern auf Distanzen und Beziehungen, bietet sich wiederum die Zuhilfenahme von Stäben in passenden Längen an (Högger 2013, S. 67).

### Verinnerlichung

Längerfristig sollten die Lernenden in der Lage sein, sich von der begehbaren Zahlenreihe zu lösen und das zuvor konkret Ausgeführte nur noch mental unter Nutzung innerer Bilder zu vollziehen. Eine entsprechende Anweisung könnte etwa so lauten:

- Gehe zur 5.
- Schließe die Augen.
- Welche Zahl hast du gerade VOR der 5 betreten?
- Welche Zahl würdest du NACH der 5 betreten, wenn du weiterlaufen würdest?

Als Variante bietet sich an, mit unvollständig sichtbaren Zahlenreihen zu arbeiten. Zu diesem Zweck werden einige Zahlenfelder entfernt, umgedreht oder abgedeckt; im o. g. Beispiel etwa die 4 und die 6. Wiederum stellen sich die Kinder auf die 5 und benennen die Vorgänger und Nachfolger. Der Zusammenhang, in dem die abgedeckten Zahlen stehen, ist nach wie vor sichtbar, was im Vergleich zur Variante mit geschlossenen Augen einen Rückgriff auf das zuvor aufgebaute innere Bild erleichtert.

Es folgen Übungen mit rein gedanklichen Bewegungen: Das Kind sitzt an seinem Arbeitsplatz und hat die begehbare Zahlenreihe nicht vor Augen. Es erhält eine analoge Aufgabe, die es vorher unmittelbar an der begehbaren Zahlenreihe gelöst hat. Es versucht, sich die Zahlenreihe und das eigene Handeln daran so vor dem inneren Auge vorzustellen, dass es die Aufgabe lösen kann. Das Kind sollte dabei die Gelegenheit haben, phy-

sisch zur begehbaren Zahlenreihe zurückzukehren, falls es sich bei der rein gedanklichen Auseinandersetzung (noch) zu unsicher fühlt.

Als Zwischenstufe zwischen der begehbaren Zahlenreihe und der rein gedanklichen Beschäftigung kann eine analoge Skizze der Zahlenreihe dienen. So haben die Lernenden immer noch das gleiche Bild vor Augen, aber nicht mehr dieselben körperlichen und räumlichen Wahrnehmungsmöglichkeiten.

### Kontinuierliche Arbeit über mehrere Schuljahre hinweg

Vorstellungsbilder zu Zahlenräumen machen eine Entwicklung durch und verändern sich im Laufe der Schulzeit. Die wesentlichen Teile der Zahlenraumvorstellung werden zu Beginn der Schulzeit ausgebildet, vor allem während die Kinder die Operationen im Zahlenraum bis 20 erlernen. Werden die Zahlenräume erweitert, z. B. vom 20er- in den 100er-Raum, ändern sich die Vorstellungsbilder nicht grundsätzlich, denn sie sind nicht numerisch exakt, sondern schemenhaft. Die wesentlichen Eigenschaften können auf den erweiterten Zahlenraum übertragen oder ausgedehnt werden. Allerdings setzt das voraus, dass die Kinder genügend lange im Zahlenraum bis 20 gearbeitet haben, um die notwendigen Vorstellungsbilder zu entwickeln (Lorenz 1992).

Die Arbeit an und mit einer begehbaren Zahlenreihe bleibt somit nicht auf die beschriebene elementare Auseinandersetzung mit Zahlen und Zahlenreihen beschränkt. Die Festigung und Weiterentwicklung der Zahlenraumvorstellung wird durch die kontinuierliche Weiterarbeit mit begehbaren Zahlenreihen unterstützt. Zur Illustration einige weitere Beispiele (Högger 2013):

- **Kommutativität der Addition:** Die Lehrperson zeigt der Klasse zwei Kärtchen mit je einer Addition; als Unterschied zwischen den beiden Kärtchen sind bloß die Summanden vertauscht ( $3 + 5/5 + 3$ ). Zwei Kin-

der übernehmen es, die beiden Additionen an der Treppe der ganzen Klasse zu demonstrieren: Das eine Kind steigt zuerst 3 Stufen hoch, das zweite 5. Dann steigt das erste 5 weitere Stufen hoch, das zweite 3. Es wird offensichtlich, dass die beiden Kinder danach auf derselben Stufe stehen.

- **Reihen üben:** Ein Kind schreitet über eine Zahlenreihe und markiert jene Zahlen, die zu einer bestimmten Reihe gehören, mit einem farbigen Zettel. Am Ende der Reihe blickt es zurück und überprüft seine Arbeit: Es sollte sich ein regelmäßiges Muster zeigen.

- **Muster in Reihen:** Haben die Lernenden etwas Übung mit dem Markieren von Reihen, arbeiten zwei Kinder gemeinsam: Sie markieren unterschiedliche Reihen, wobei dafür verschieden farbige Zettel zur Verfügung stehen. Am Ende der Reihe blicken sie gemeinsam zurück und überprüfen das entstandene Muster.

Je nach Zahlenbereich und Aufgabenstellung verändert sich die Form der verwendeten Zahlenreihe; auch für den Bereich unter 0 und in der Form der Hundertertafel lassen sie sich zum Einsatz bringen. Dazu ein weiteres Beispiel: Auf dem 100er-Feld horizontale, vertikale und diagonale Wege abschreiten und dazu die betretenen Zahlen laut aufsagen. Später dann gezackte Wege abschreiten, die betretenen Zahlen protokollieren und anhand des Protokolls noch einmal begehen. Solche Protokolle enthalten zunächst jede einzelne betretene Zahl. Später werden nur noch die Richtungswechsel notiert, z. B.  $67 + 3 = 70$ ;  $70 + 30 = 100$  (Kläy 2006).

### Schlussbemerkungen

Begehbare Zahlenreihen sind eine Erweiterung des bestehenden Methodenrepertoires. Angesichts der Heterogenität der Schülerinnen und Schüler, angesichts der Abstraktheit und damit schwierigen Nachvollziehbarkeit bestimmter Lerninhalte soll

diese Erweiterung dazu beitragen, mehr Kindern ein lustvolles und erfolgreiches Lernen zu ermöglichen.

Zentrale Voraussetzung dafür ist, dass die Lernenden inhaltlich bedeutungsvolle Wahrnehmungen machen. Begreifbare Zahlenreihen tragen das Risiko in sich, dass die Lernenden nur die körperliche Betätigung, nicht aber die damit verknüpften Inhalte als Teil der Aufgabe erkennen. Klare Handlungsanweisungen und genügend Zeit erleichtern es den Lernenden, den Zusammenhang zwischen der körperlichen Betätigung und den Sachinhalten zu erkennen und zu verstehen. Allenfalls benötigen sie gezielte Hinweise auf inhaltliche Aspekte, die ihnen schon vertraut sind.

Diese grundsätzlichen Überlegungen zur körperlichen und räumli-

chen Wahrnehmung lassen sich auf andere Lerngegenstände, beispielsweise auf Satz- und Textstrukturen, auf den Blutkreislauf, das Sonnensystem etc., übertragen. Wo immer Strukturen und Prozesse durch Raum-Lage-Beziehungen wie oben und unten, hinten und vorne oder links und rechts charakterisiert werden, lassen sie sich so abbilden, dass sie der Körper- und Raumwahrnehmung zugänglich werden (Högger 2013). ■

#### Literatur

Dehaene, Stanislas (1999): *Der Zahlensinn oder Warum wir rechnen können*. Basel: Birkhäuser.

Högger, Dominique (2013): *Körper und Lernen. Mit Bewegung, Körperwahrnehmung und Raumorientierung das Lernen unterstützen*. Bern: Schulverlag.

Kläy, Marianne (2006): *Lebendiges Lernen. Anregungen für eine Schule in Bewegung*. Bern: Haupt.

Lorenz, Jens Holger (1992): *Anschauung und Veranschaulichungsmittel im Mathematikunterricht*. Göttingen: Hogrefe.

Royar, Thomas (2013): *Handlung – Vorstellung – Formalisierung*. Hamburg: Dr. Kovac.

#### Anschrift der Autoren

Dominique Högger, Leiter der Beratungsstelle Gesundheitsbildung und Prävention, Pädagogische Hochschule FHNW, Bahnhofstr. 6., CH-5210 Windisch, E-Mail: dominique.hoegger@fhnw.ch

Dr. Thomas Royar, Dozent für Mathematikdidaktik und Mathematik, Inst. f. Vorschule und Unterstufe, Pädag. Hochschule FHNW, Benzburweg 30, CH-4410 Liestal, E-Mail: thomas.royar@fhnw.ch