Formelsammlung Mathematik für Gymnasien

 / Version 1.22

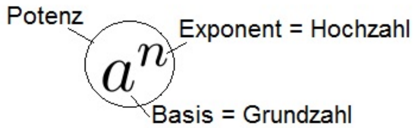
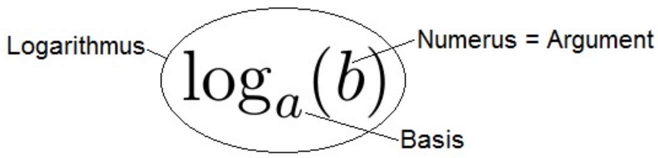
https://formel-vetter.jimdo.com

Druckempfehlung: Broschürendruck A5 mit Sattelheftung

Inhaltsverzeichnis

1 Algebra

Zahlen-mengen	$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ Menge der **natürlichen Zahlen** $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2 \ldots\}$ Menge der **ganzen Zahlen** $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}\}$ Menge der **rationalen Zahlen** (Brüche) $\mathbb{R} =$ reelle Zahlengerade Menge der **reellen Zahlen** (Kommazahlen) --- $\mathbb{C} = \{a + i\,b \mid a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}\} =$ komplexe Zahlenebene Menge der **komplexen Zahlen**
Binomi-scher Lehrsatz	$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ --- $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ $(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$ $(a \pm b)^n = \sum_{k=0}^{n} (\pm 1)^k \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$
Fakul-täten, Binomial-koeffi-zienten	**Fakultäten** $n! = n$ Fakultät $= n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ $0! = 1$ --- **Binomialkoeffizienten** $\binom{n}{k} = n$ tief $k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ $\binom{n}{0} = 1$ Symmetrieeigenschaft $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
Quadra-tische Gleichung	$ax^2 + bx + c = 0$ **Lösungen** $\hookrightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ Für $d =$ **Diskriminante** $= b^2 - 4ac$ $\begin{cases} > 0 & \Rightarrow \text{zwei Lösungen} \\ = 0 & \Rightarrow \text{eine Lösung} \\ < 0 & \Rightarrow \text{keine Lösung} \end{cases}$ --- **Satz von Vieta** $\boxed{1}$ $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ $\boxed{2}$ $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$
Produkt-ansatz	Es ist die Gleichung $f(x) = 0$ zu lösen. Lässt sich die linke Seite **faktorisieren**, also als $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots f_n(x) = 0$ schreiben, so gilt $f(x) = 0 \Leftrightarrow (f_1(x) = 0$ oder $f_2(x) = 0$ oder ... oder $f_n(x) = 0)$ Die **Lösungsmenge** von $f(x) = 0$ ist also die **Vereinigung** der Lösungsmengen der n einfacheren Gleichungen $f_i(x) = 0$ für $i = 1, \ldots n$.

Potenzgesetze	$\boxed{1}\ a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $\boxed{2}\ \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $\boxed{3}\ (a^m)^n = a^{mn}$ $\boxed{4}\ (ab)^m = a^m b^m$ $\boxed{5}\ (\frac{a}{b})^m = \dfrac{a^m}{b^m}$  **Folgerungen** • $a^0 = 1$ • $a^1 = a$ • $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$ • $a^{-r} = \dfrac{1}{a^r}$ • $a^{1/2} = \sqrt{a}$ • $a^{1/q} = \sqrt[q]{a}$ • $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$ • $a^{-p/q} = \dfrac{1}{\sqrt[q]{a^p}}$ Kombinierte Gesetze • $\boxed{1}$-$\boxed{2}$ $\dfrac{a^2 \cdot a^3}{a^5 \cdot a^{-2}} = a^{2+3-5-(-2)} = a^{2+3-5+2} = a^2$ • $\boxed{3}$-$\boxed{5}$ $(-\dfrac{2ab^2}{3c^3})^4 = +\dfrac{2^4 a^4 b^8}{3^4 c^{12}}$
Logarithmengesetze	$\boxed{1}\ \log_a(bc) = \log_a(b) + \log_a(c)$ $\boxed{2}\ \log_a(\frac{b}{c}) = \log_a(b) - \log_a(c)$ $\boxed{3}\ \log_a(b^n) = n \cdot \log_a(b)$ $\boxed{4}$ **Basiswechsel** $\log_b(c) = \dfrac{\log_a(c)}{\log_a(b)}$  **Eigenschaften / Folgerungen** • $\log_a(b)$ beantwortet die Frage $a^? = b$ • $\log_a(1) = 0$ • $\log_a(a) = 1$ • $\log_a$ und a^{hoch} sind gegenseitige Umkehrfunktionen. $\hookrightarrow \log_a(a^x) = x$ und $\hookrightarrow a^{\log_a(x)} = x$ • $\log_b(a) = \dfrac{1}{\log_a(b)}$ • $\ln(x) = \log_e(x)$ **Natürlicher Logarithmus**, $e =$ **Eulersche Zahl** $= 2.718\ldots$ • $\log(x) = \lg(x) = \log_{10}(x)$ **Zehnerlogarithmus** Kombiniertes Gesetz $\boxed{1}$-$\boxed{3}$ $\log_a(\dfrac{2a^2b}{3c^4}) = \log_a(2) + 2\log_a(a) + \log(b) - \log_a(3) - 4\log_a(c)$
Arithmetische Zahlenfolge	$a_{n+1} = a_n + d$ **Rekursive Darstellung** $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ **Explizite Darstellung** $a_n = a_m + (n-m) \cdot d$ $s_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \dfrac{d}{2} \cdot n^2 + (a_1 - \dfrac{d}{2}) \cdot n$ **Summenformel**

Geometrische Zahlenfolge	$a_{n+1} = a_n \cdot q$ **Rekursive Darstellung** $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ **Explizite Darstellung** $a_n = a_m \cdot q^{n-m}$ $s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ **Summenformel** $s = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a_1}{1-q}$ existiert für $-1 < q < 1$ **'Unendliche Reihe'**
Summen spezieller Reihen	$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ $\sum_{k=m}^{n} k = \frac{(n+m)(n-m+1)}{2}$ $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ $\sum_{k=1}^{n} q^k = \frac{q(q^n-1)}{q-1}$ $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ $\sum_{k=1}^{n} kq^k = \frac{q(nq^{n+1} - (n+1)q^n + 1)}{(q-1)^2}$
Exponentielles Wachstum/ Zerfall	$y = a \cdot q^t$ und $q = 1 + p$ bzw. $q = e^r$ Legende y = Endwert; a = Anfangswert; q = **Wachstumsfaktor** pro Periode; t = Zeit in Perioden; p = effektive **Zuwachsrate** pro Periode. r = **stetige Zuwachsrate** pro Periode. **Wachstumsfaktor für z Perioden** $\hookrightarrow q^z$ **Verdoppelungszeit** $(q > 1)$ $\hookrightarrow T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(q)} \approx \frac{70\%}{p}$ **Halbwertszeit** $(q < 1)$ $\hookrightarrow T_{1/2} = -\frac{\ln(2)}{\ln(q)} \approx \frac{70\%}{-p}$
Lineares Wachstum	$y = a \cdot (1 + p \cdot t)$ Legende y = Endwert; a = Anfangswert; p = Zuwachssrate* pro Periode; t = Zeit in Perioden. *relativ zu Anfangswert a.
Zinses-Zins	$q = 1 + p$ **Aufzinsfaktor** (pro Jahr) q, effektiver Jahreszinssatz p $K_n = K_0 \cdot q^n$ **Aufzinsen** um n Jahre $K_0 = \frac{K_n}{q^n}$ **Abzinsen** um n Jahre
Renten	(siehe Tabelle unten)

Renten:

Zahlungsperiode ...	1 Jahr	z Jahre
Wert auf ersten Rentenzahlungstermin	$W = R \cdot \frac{1 - q^{-n}}{1 - q^{-1}}$	$W = R \cdot \frac{1 - q^{-n \cdot z}}{1 - q^{-z}}$
Wert auf letzten Rentenzahlungstermin	$W = R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$	$W = R \cdot \frac{q^{n \cdot z} - 1}{q^z - 1}$

Legende R = Rentenrate, q = Aufzinsfaktor (pro Jahr),
n = Anzahl Rentenratenzahlungen,
z = Zahlungsperiode (in Jahren), z.B. $z = \frac{1}{12}$ für monatlich.

2 Trigonometrie

Winkelmass

Gradmass (deg) Voller Winkel $= 360°$
Bogenmass (rad) Voller Winkel $= 2\pi$

$\pi =$ Kreiszahl $= 3.141592653\ldots$

$$b = \alpha \cdot \frac{\pi}{180°} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = b \cdot \frac{180°}{\pi}$$

Legende $b =$ Winkel im Bogenmass; $\alpha =$ Winkel im Gradmass

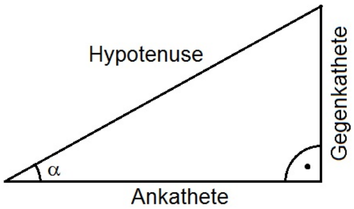
Trigonometrische Funktionen

1) **Definition** für $0° < \alpha < 90°$ am '**Rechtwinkligen Dreieck**'.

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

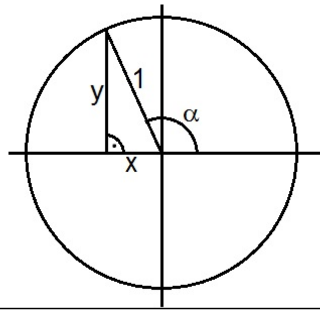


2) **Definition** für beliebiges α am '**Einheitskreis**'.

$$\cos(\alpha) = x$$

$$\sin(\alpha) = y$$

$$\tan(\alpha) = \frac{y}{x}$$



Werte für spezielle Winkel

α	$0°$	$\pm 30°$	$\pm 45°$	$\pm 60°$	$\pm 90°$	$\pm 120°$	$\pm 135°$	$\pm 150°$	$180°$
b	0	$\pm\frac{\pi}{6}$	$\pm\frac{\pi}{4}$	$\pm\frac{\pi}{3}$	$\pm\frac{\pi}{2}$	$\pm\frac{2\pi}{3}$	$\pm\frac{3\pi}{4}$	$\pm\frac{5\pi}{6}$	π
sin	0	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$	± 1	$\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tan	0	$\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$	± 1	$\pm\sqrt{3}$	n.d.	$\mp\sqrt{3}$	∓ 1	$\mp\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Trigonometrische Identitäten

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1 \qquad \tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

Symmetrie ($\frac{\pi}{2}$[rad] $= 90°$[deg] ; π[rad] $= 180°$[deg]):

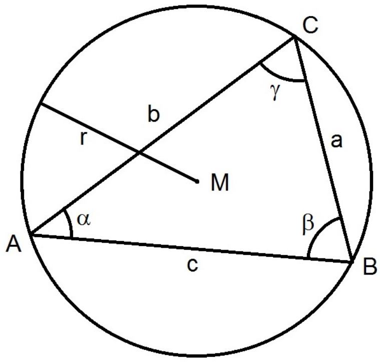
$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$	$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$	$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$
$\cos(\frac{\pi}{2} \pm \alpha) = \mp\sin(\alpha)$	$\sin(\frac{\pi}{2} \pm \alpha) = \cos(\alpha)$	$\tan(\frac{\pi}{2} \pm \alpha) = \mp\frac{1}{\tan(\alpha)}$
$\cos(\pi \pm \alpha) = -\cos(\alpha)$	$\sin(\pi \pm \alpha) = \mp\sin(\alpha)$	$\tan(\pi \pm \alpha) = \pm\tan(\alpha)$

Periodizität (π[rad] $= 180°$[deg] ; 2π[rad] $= 360°$[deg]):

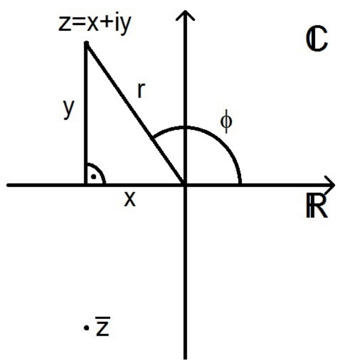
$\cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha)$	$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha)$	$\tan(\alpha + \pi) = \tan(\alpha)$

Summen, Differenzen, doppelte und halbe Winkel

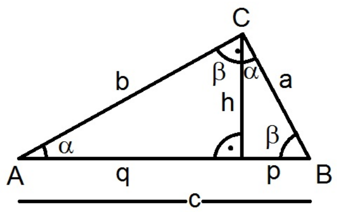
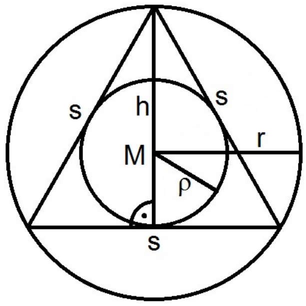
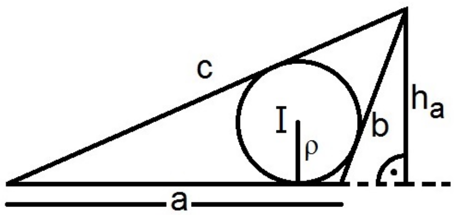
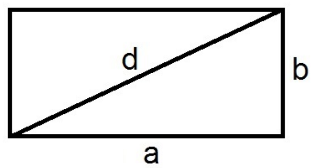
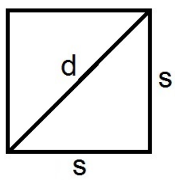
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$	$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$	$\cos(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}$
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \sin(\alpha)\sin(\beta)$	$\sin(2\alpha) = 2\cos(\alpha)\sin(\alpha)$	$\sin(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}$
$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha)\tan(\beta)}$	$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}$	$\tan(\frac{\alpha}{2}) = \frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}$

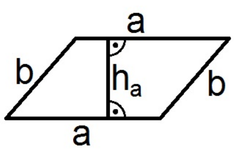
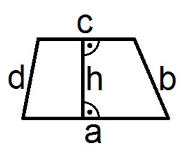
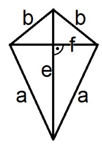
Allge-meines Ebenes Dreieck	1) **Winkelsumme** $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ 2) **Sinussatz** $\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b}$ und $(*)$ bzw. $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$ und $(*)$. 3) **Cosinussatz** $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$ und $(*)$. 4) **Umkreisradius** $r = \frac{a}{2\sin(\alpha)}$ und $(*)$. 5) **Fläche** $A = \frac{ab\sin(\gamma)}{2}$ und $(*)$. $(*)$ = 'zyklisch vertauscht' 

3 Komplexe Zahlen

Definition und Darstel-lungen	Die **Imaginäre Einheit** i erfüllt die Gleichung $i^2 = -1$ **Karthesische Form** $z = x + iy$ **Polarform** $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$ dafür schreibt man auch kurz $z = r\,\mathsf{cis}\,\phi$ **Eulersche Relation** $z = re^{i\phi}$ ϕ im Bogenmass! **Konjugiert komplexe Zahl** $\overline{z} = x - iy = r(\cos\phi - i\sin\phi) = r\,\mathsf{cis}\,(-\phi) = re^{-i\phi}$ 
Rechen-opera-tionen	**Addition** $z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$ **Subtraktion** $z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$ **Multiplikation** $z_1 \cdot z_2 = r_1\,\mathsf{cis}\,\phi_1 \cdot r_2\,\mathsf{cis}\,\phi_2 = r_1 r_2\,\mathsf{cis}\,(\phi_1 + \phi_2)$ **Division** $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1\,\mathsf{cis}\,\phi_1}{r_2\,\mathsf{cis}\,\phi_2} = \frac{r_1}{r_2}\,\mathsf{cis}\,(\phi_1 - \phi_2)$ **Potenz** $z^n = (r_1\,\mathsf{cis}\,\phi)^n = r_1^n\,\mathsf{cis}\,(n\phi)$ **Wurzel** $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r\,\mathsf{cis}\,\phi} = \sqrt[n]{r}\,\mathsf{cis}\,(\frac{\phi + 2\pi k}{n})$, für $k = 0, \ldots, n-1$ Im **Gradmass** natürlich analog ... **Wurzel** $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r\,\mathsf{cis}\,\phi} = \sqrt[n]{r}\,\mathsf{cis}\,(\frac{\phi + 360°k}{n})$, für $k = 0, \ldots, n-1$ **Fundamentalsatz** der Algebra: Jede Polynomgleichung n-ten Grades $a_n x^n + \ldots a_1 x + a_0 = 0$ $(a_n \neq 0)$ hat in $\mathbb{C}$ genau n Lösungen.

4 Planimetrie

Dreieck rechtwinklig	**Pythagoras** $a^2 + b^2 = c^2$ **Höhensatz** $h^2 = pq$ **Kathetensatz** $a^2 = pc$ und $b^2 = qc$ **Flächensatz** $ab = hc$ 
Dreieck gleichseitig	**Umfang** $u = 3s$ **Höhe** $h = \frac{s\sqrt{3}}{2}$ **Fläche** $A = \frac{s^2\sqrt{3}}{4}$ **Umkreisradius** $r = \frac{s\sqrt{3}}{3}$ **Inkreisradius** $\rho = \frac{s\sqrt{3}}{6}$ 
Dreieck allgemein	Siehe auch Trigonometrie! **Umfang** $u = a + b + c$ **Fläche** $A = \frac{a \cdot h_a}{2}$ Die **Formel von Heron** Fläche $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, mit $s = \frac{u}{2}$ **Inkreisradius** $\rho = \frac{A}{s} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$ 
Rechteck	**Umfang** $u = 2a + 2b$ **Fläche** $A = ab$ **Diagonale** $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ 
Quadrat	**Umfang** $u = 4s$ **Fläche** $A = s^2$ **Diagonale** $d = s\sqrt{2}$ 

Weitere Vierecke	**Name**	Parallelogramm	Trapez	Drachen
				
	Umfang	$u = 2a + 2b$	$u = a + b + c + d$	$u = 2a + 2b$
	Fläche	$A = a \cdot h_a$	$A = \frac{a+c}{2} \cdot h$	$A = \frac{e \cdot f}{2}$

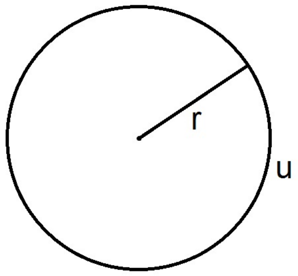
<table>
<tr><td>Kreis 1</td><td>

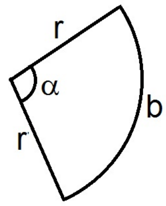
Umfang $u = 2\pi r$

Fläche $A = \pi r^2$

Sektorfläche $A = \pi r^2 \cdot \dfrac{\alpha}{360°}$

Sektorbogenlänge $b = 2\pi r \cdot \dfrac{\alpha}{360°}$





Maximal-/Minimaleigenschaft

Der Kreis ist die Figur, die bei vorgegebenem Umfang maximale Fläche hat.

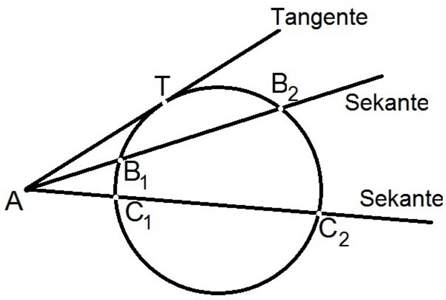
Der Kreis ist die Figur, die bei vorgegebener Fläche minimalen Umfang hat.

</td></tr>
<tr><td>Kreis 2</td><td>

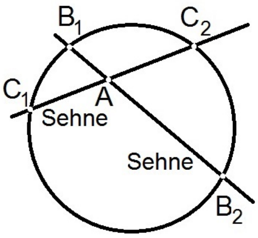
Sekantensatz $\overline{AB_1} \cdot \overline{AB_2} = \overline{AC_1} \cdot \overline{AC_2} = \overline{AT}^2$

Sehnensatz $\overline{AB_1} \cdot \overline{AB_2} = \overline{AC_1} \cdot \overline{AC_2}$

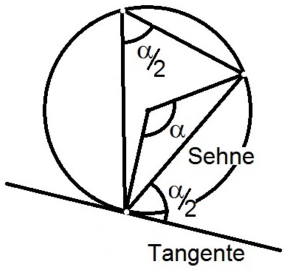
Peripheriewinkelsatz
$\hookrightarrow$ Peripheriewinkel = Sehnentangentenwinkel = $\dfrac{\text{Zentriwinkel}}{2}$



Sekantensatz



Sehnensatz



Peripheriewinkelsatz

</td></tr>
</table>

5 Stereometrie

<table>
<tr><td>Prisma</td><td>

Volumen $V = G \cdot h$

Legende G = Flächeninhalt Grundfläche;

h = Körperhöhe.

Die Formel gilt auch für schiefe Prismen!

Mantelfläche $M = u \cdot h$

Legende u = Umfang Grundfläche;

h = Körperhöhe.

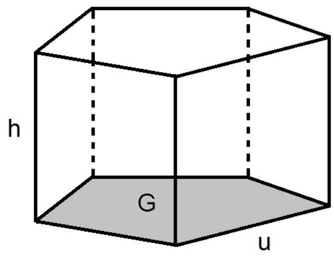
Die Formel gilt nicht für schiefe Prismen!

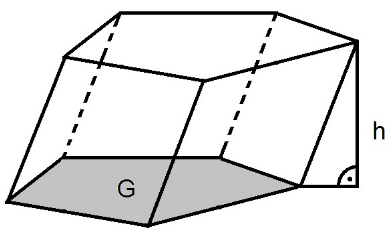
Für schiefe Prismen: M zusammensetzen aus Parallelogrammen!

Oberfläche $O = 2G + M$

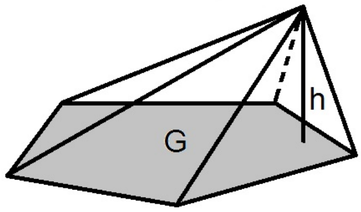
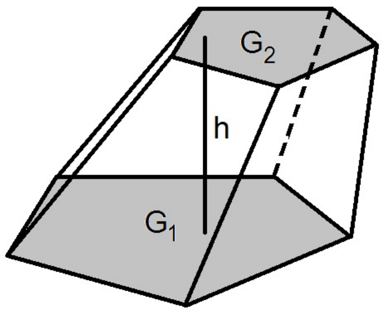
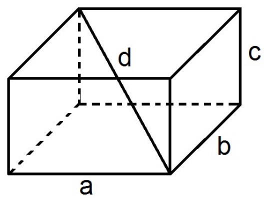
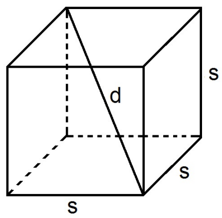
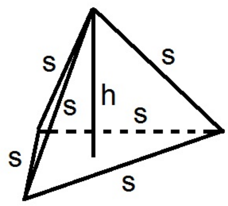
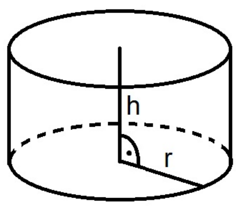
Legende G = Grundfläche; M = Mantelfläche.

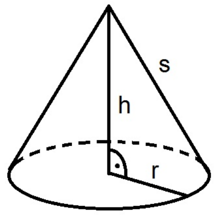
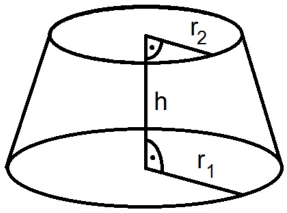
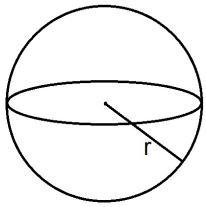
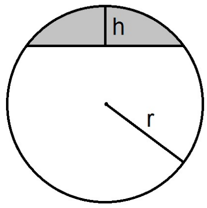
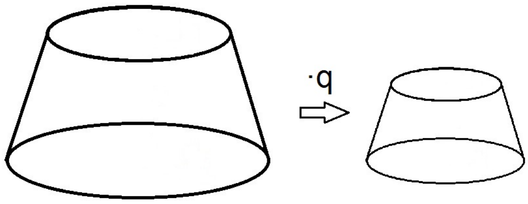
Die Formel gilt auch für schiefe Prismen!



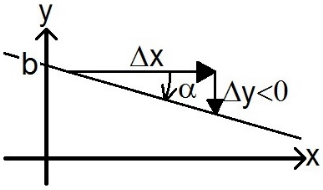
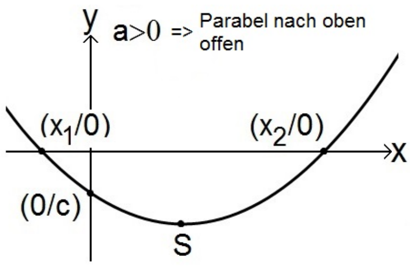
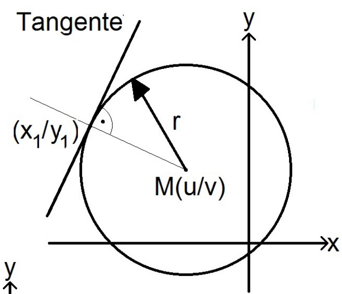
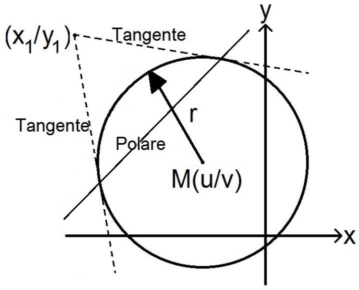


</td></tr>
</table>

Pyramide	**Volumen** $V = \dfrac{G \cdot h}{3}$ Legende $G =$ Flächeninhalt Grundfläche; $h =$ Körperhöhe. *Die Formel gilt auch für schiefe Pyramiden!* **Mantelfläche** M zusammensetzen aus Dreiecken! **Oberfläche** $O = G + M$ Legende $G =$ Grundfläche; $M =$ Mantelfläche. *Die Formel gilt auch für schiefe Pyramiden!* 
Pyramiden-stumpf	**Volumen** $V = \dfrac{h}{3} \cdot (G_1 + \sqrt{G_1 G_2} + G_2)$ Legende $G_1 =$ Grundfläche; $G_2 =$ Deckfläche; $h =$ Körperhöhe. *Die Formel gilt auch für schiefe Pyramidenstümpfe!* **Mantelfläche** M zusammensetzen aus Trapezen! **Oberfläche** $O = G_1 + G_2 + M$ Legende $G_1 =$ Grundfläche; $G_2 =$ Deckfläche; $M =$ Mantelfläche. *Die Formel gilt auch für schiefe Pyramidenstümpfe!* 
Quader	**Volumen** $V = abc$ **Oberfläche** $O = 2ab + 2ac + 2bc$ **Raumdiagonale** $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ 
Würfel	**Volumen** $V = s^3$ **Oberfläche** $M = 6s^2$ **Raumdiagonale** $d = s\sqrt{3}$ 
Tetraeder	**Körperhöhe** $h = s \cdot \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ **Volumen** $V = \dfrac{s^3 \cdot \sqrt{2}}{12}$ **Oberfläche** $O = s^2 \cdot \sqrt{3}$ 
Gerader Kreis-zylinder	**Volumen** $V = r^2 \pi h$ **Mantelfläche** $M = 2\pi r h$ **Oberfläche** $O = 2\pi r(r + h)$ 

Gerader Kreiskegel	**Volumen** $V = \frac{r^2 \pi h}{3}$ **Seitenlinie** $s = \sqrt{r^2 + h^2}$ **Mantelfläche** $M = \pi r s$ **Oberfläche** $O = \pi r(r+s)$ 
Gerader Kreiskegel-stumpf	**Volumen** $V = \frac{\pi h}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$ **Seitenlinie** $s = \sqrt{(r_1 - r_2)^2 + h^2}$ **Mantelfläche** $M = \pi s(r_1 + r_2)$ **Oberfläche** $O = \pi \cdot (r_1^2 + (r_1 + r_2)s + r_2^2)$ 
Kugel	**Volumen** $V = \frac{4\pi r^3}{3}$ **Oberfläche** $O = 4\pi r^2$ **Maximal-/Minimaleingeschaft** Die Kugel ist der Körper mit grösstem Volumen bei gegebener Oberfläche. Die Kugel ist der Körper mit kleinster Oberfläche bei gegebenem Volumen. 
Kugel-segment	**Volumen** $V = \frac{\pi h^2(3r - h)}{3}$ **Mantelfläche** $M = 2\pi r h$ **Oberfläche** $O = \pi h(4r - h)$ 
Streckungen	Wird ein Körper mit dem Faktor q gestreckt/gestaucht, dann ändern sich **Längen** mit Faktor q **Flächen** mit Faktor q^2 **Volumen** mit Faktor q^3 

6 Analytische Geometrie der Ebene

Gerade	**Hauptform** $y = mx + b$ Legende m = Steigung; b = y-Achsenabschnitt  **Steigung** $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ = Differenzenquotient **Punkt-Steigungsform** $y = m(x - x_1) + y_1$ Legende m = Steigung; (x_1/y_1) = Punkt auf der Gerade **Steigungswinkel** = Winkel gegen positive x-Achse = $\alpha = \arctan(m)$ Zwei Geraden sind **parallel** $\Leftrightarrow m_1 = m_2$ Zwei Geraden sind **senkrecht** $\Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$ **Winkel** zwischen zwei Geraden $\hookrightarrow \min(\alpha, 180° - \alpha)$, mit $\alpha = \lvert\arctan(m_2) - \arctan(m_1)\rvert$ --- **Normalform** $ax + by + c = 0$ Legende $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ = Normalenvektor = Vektor senkrecht zur Geraden
Parabel	**Hauptform** $y = ax^2 + bx + c$ Legende a = Öffnungsparamter; c = y-Achsenabschnitt  **Nullstellen** $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ **Scheitelpunkt** $S(-\frac{b}{2a} \;/\; c - \frac{b^2}{4a})$ **Scheitelform** $y = a(x - x_s)^2 + y_s$ Legende a = Öffnungsparameter; (x_s/y_s) = Scheitel der Parabel **Nullstellenform** $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ Legende a = Öffnungsparameter; x_1, x_2 = Nullstellen
Kreis	**Hauptform** $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ **Mittelpunkt** $M(-\frac{a}{2} \;/\; -\frac{b}{2})$  **Radius** $r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}$ **Mittelpunktsform** $(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2$ Legende (u/v) = Mittelpunkt; r = Radius  **Tangente** im Kreispunkt (x_1/y_1) $\hookrightarrow (x_1 - u)(x - u) + (y_1 - v)(y - v) = r^2$ Legende (u/v) = Mittelpunkt; r = Radius **'Polare'** zum Punkt (x_1/y_1) $\hookrightarrow (x_1 - u)(x - u) + (y_1 - v)(y - v) = r^2$ Legende (u/v) = Mittelpunkt; r = Radius

7 Vektorgeometrie (im Raum)

Grund-
begriffe

Ortsvektor von Punkt $A(x/y/z)$ $\hookrightarrow \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Vektor von A nach B $\hookrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A}$

Betrag eines Vektors = Länge des Vektors $\hookrightarrow |\overrightarrow{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$

Skalarprodukt zweier Vektoren $\hookrightarrow \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + v_3 \cdot w_3$

Es gilt $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = |\overrightarrow{v}| \cdot |\overrightarrow{w}| \cdot \cos\alpha$; α = Zwischenwinkel.

Es gilt $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} = |\overrightarrow{v}|^2$

Es gilt $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{w}$

Vektorprodukt zweier Vektoren $\hookrightarrow \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} v_2 \cdot w_3 - v_3 \cdot w_2 \\ v_3 \cdot w_1 - v_1 \cdot w_3 \\ v_1 \cdot w_2 - v_2 \cdot w_1 \end{pmatrix}$

Es gilt $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow v \| w$

Es gilt $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}$ steht senkrecht auf $\overrightarrow{v}$ und senkrecht auf $\overrightarrow{w}$

Es gilt $|\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}|$

= Fläche des von $\overrightarrow{v}$ und $\overrightarrow{w}$ aufgespannten Parallelogrammes

$= |\overrightarrow{v}| \cdot |\overrightarrow{w}| \cdot \sin\alpha$; α = Zwischenwinkel

Winkel zwischen zwei Vektoren $\hookrightarrow \cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}}{|\overrightarrow{v}| \cdot |\overrightarrow{w}|}$

Winkelhalbierender Vektor zweier Vektoren $\hookrightarrow \dfrac{\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{v}|} + \dfrac{\overrightarrow{w}}{|\overrightarrow{w}|}$

Vektor der Länge ℓ $\hookrightarrow \dfrac{\ell}{|\overrightarrow{v}|} \cdot \overrightarrow{v}$

Fläche des Dreiecks aufgespannt durch zwei Vektoren $\hookrightarrow \dfrac{|\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}|}{2}$

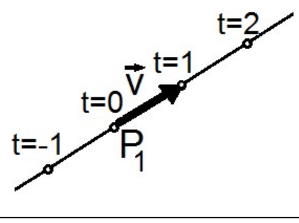
Mittelpunkt einer Strecke $\overline{AB}$ $\hookrightarrow \overrightarrow{M} = \dfrac{\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}}{2}$

Teilpunkt Verhältnis $a : b$ einer Strecke $\overline{AB}$ $\hookrightarrow \overrightarrow{T} = \dfrac{b \cdot \overrightarrow{A} + a \cdot \overrightarrow{B}}{a + b}$

Schwerpunkt einer Dreiecks ABC $\hookrightarrow \overrightarrow{S} = \dfrac{\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}}{3}$

Gerade

Parameterform $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{P_1} + t \cdot \overrightarrow{v}$



Legende $\overrightarrow{P_1}$ = Ortsvektor des Fusspunktes P_1;

$t \in \mathbb{R}$ Parameter; $\overrightarrow{v}$ = Richtungsvektor

Zwei Geraden sind dann **parallel**, wenn ihre Richtungsvektoren parallel sind.

Zwei Geraden im Raum können **zusammenfallen**, **echt parallel** sein, **sich schneiden** oder **windschief** sein.

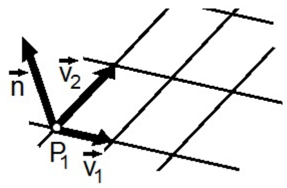
Ebene

Parameterform $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{P_1} + t_1 \cdot \overrightarrow{v_1} + t_2 \cdot \overrightarrow{v_2}$

Legende $\overrightarrow{P_1}$ = Ortsvektor des Fusspunktes P_1; $t, s \in \mathbb{R}$ Parameter;
$\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ = Richtungsvektoren.

Koordinatenform $Ax + By + Cz + D = 0$

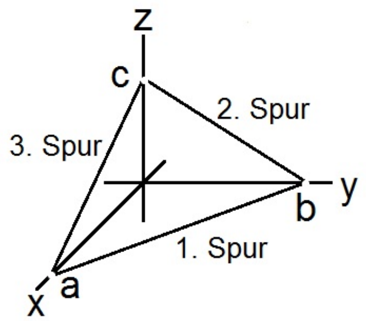
Legende $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ = Normalenvektor.



Übergang Parameterform zu Koordinatenform
$\boxed{1}$ $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}$, $\boxed{2}$ D findet man durch Einsetzen von Fusspunkt P_1.

Hessesche Normalform $\dfrac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$

Legende $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ = Normalenvektor.



Abschnittsform $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$

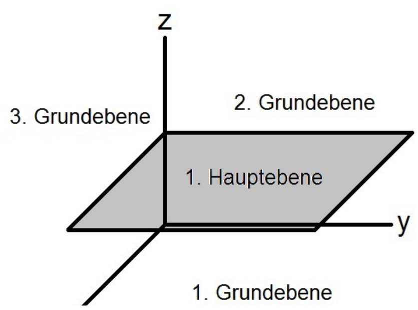
Legende a = x-Achsenabschnitt;
b = y-Achsenabschnitt;
c = z-Achsenabschnitt.

Die Schnittgeraden einer Ebene mit den drei Koordinatenebenen heissen die drei Spurgeraden oder **Spuren** der Ebene.

Spezielle Lagen von Ebenen

Koordinatenebenen = Grundebenen

1. Grundebene = xy-Ebene $\hookrightarrow z = 0$
2. Grundebene = yz-Ebene $\hookrightarrow x = 0$
3. Grundebene = xz-Ebene $\hookrightarrow y = 0$

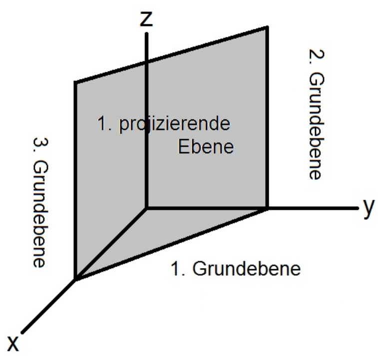


Hauptebenen

1. Hauptebene $\parallel$ xy-Ebene $\hookrightarrow z + D = 0$
2. Hauptebene $\parallel$ yz-Ebene $\hookrightarrow x + D = 0$
3. Hauptebene $\parallel$ xz-Ebene $\hookrightarrow y + D = 0$

Projizierende Ebenen

1. Projizierende Ebene $\perp$ xy-Ebene $\parallel$ z-Achse
   $\hookrightarrow Ax + By + D = 0$
2. Projizierende Ebene $\perp$ yz-Ebene $\parallel$ x-Achse
   $\hookrightarrow By + Cz + D = 0$
3. Projizierende Ebene $\perp$ xz-Ebene $\parallel$ y-Achse
   $\hookrightarrow Ax + Cz + D = 0$



<table>
<tr>
<td>Abstands-
probleme</td>
<td>
Bezeichnungen ...
Punkte Q bzw. Q_1 und Q_2
Geraden $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{P} + t \cdot \overrightarrow{v}$ bzw. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{P_1} + t \cdot \overrightarrow{v_1}$ und $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{P_2} + t \cdot \overrightarrow{v_2}$
Ebenen $Ax + By + Cz + D = 0$, Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ bzw.
$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, Normalenvektor $\overrightarrow{n_1}$ und
$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, Normalenvektor $\overrightarrow{n_2}$
<hr>
Punkt-Punkt
Abstand $= |\overrightarrow{Q_1Q_2}|$
Punkt-Gerade
Abstand $= \dfrac{|\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{PQ}|}{|\overrightarrow{v}|}$
Punkt-Ebene
Abstand $= \left. \dfrac{|Ax + By + Cz + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|_{(x/y/z)=Q}$
Gerade-Gerade
Abstand $= \begin{cases} \dfrac{|(\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}) \cdot \overrightarrow{P_1P_2}|}{|\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}|} & \text{, falls } \overrightarrow{v_1} \nparallel \overrightarrow{v_2} \\ \dfrac{|\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{P_1P_2}|}{|\overrightarrow{v_1}|} & \text{, falls } \overrightarrow{v_1} \parallel \overrightarrow{v_2} \end{cases}$
Gerade-Ebene
Abstand $= \begin{cases} 0 & \text{, falls } \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{v} \neq 0 \\ \left. \dfrac{|Ax + By + Cz + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|_{(x/y/z)=P} & \text{, falls } \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{v} = 0 \end{cases}$
Ebene-Ebene
Abstand $= \begin{cases} 0 & \text{, falls } \overrightarrow{n_1} \nparallel \overrightarrow{n_2} \\ \left. \dfrac{|A_1x + B_1y + C_1z + D_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} \right|_{(x/y/z)=R_2^*} & \text{, falls } \overrightarrow{n_1} \parallel \overrightarrow{n_2} \end{cases}$
, wobei R_2^* ein beliebiger Punkt auf Ebene 2 ist.
</td>
</tr>
<tr>
<td>Winkel-
probleme</td>
<td>
Bezeichnungen ... wie unter Abstandprobleme ($\uparrow$).
<hr>
Gerade-Gerade Winkel $= \arccos\left(\dfrac{|\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2}|}{|\overrightarrow{v_1}| \cdot |\overrightarrow{v_2}|}\right)$
Gerade-Ebene Winkel $= \arcsin\left(\dfrac{|\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{v}| \cdot |\overrightarrow{n}|}\right)$
Ebene-Ebene Winkel $= \arccos\left(\dfrac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|}\right)$
</td>
</tr>
</table>

8 Grenzwerte

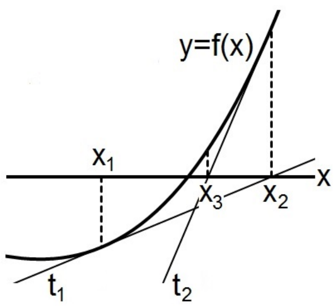
Zahlen-folgen	Bezeichnen a_n und b_n zwei **konvergente Zahlenfolgen** mit $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = B$ und sei weiter C eine Konstante, dann gilt $\lim_{n\to\infty} (C \cdot a_n) = C \cdot A$ $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = A \pm B$ $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$ $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$, falls $B \neq 0$ --- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^s} = \lim_{n\to\infty} n^{-s} = 0$, falls $s > 0$ $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$, falls $-1 < q < 1$ $\lim_{n\to\infty} n^s \cdot q^n = 0$, falls $-1 < q < 1$ $\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$ $\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{x}{n})^n = e^x$
Funktionen	Eine Funktion $f(x)$ heisst **stetig** an der Stelle c, falls gilt $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ --- Für die beiden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ gelte $\lim_{x\to c} f(x) = A$ und $\lim_{x\to c} g(x) = B$, zudem sei D eine Konstante. c ist Element der Menge $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, A, B und D sind Elemente von $\mathbb{R}$. $\lim_{x\to c}(D \cdot f(x)) = D \cdot A$ $\lim_{x\to c}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B$ $\lim_{x\to c}(f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$ $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$, falls $B \neq 0$ $\lim_{x\to c} f(g(x)) = f(B)$, falls $f(x)$ stetig an der Stelle B ist. --- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ Bemerkung: x im Bogenmass! $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x - 1} = 1$ $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^s} = 0$, für $s > 0$ $\lim_{x\to\infty} x^s \cdot q^x = 0$, für $-1 < q < 1$ $\lim_{x\to\infty} x^s \cdot q^x = \infty$, für $q > 1$

9 Differentialrechnung

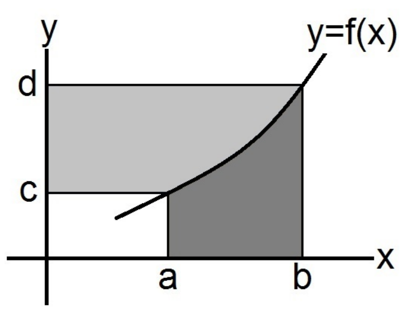
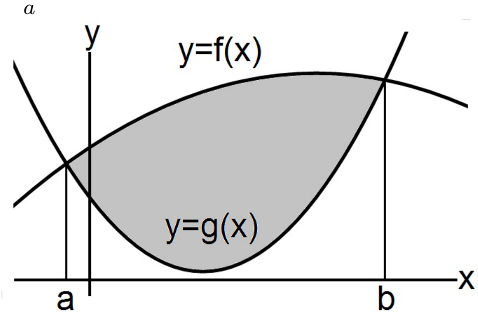
Definition	**Ableitungsfunktion** $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ Übliche Bezeichnungen für die Ableitungsfunktion sind $f'(x)$ oder $\dfrac{df(x)}{dx}$. Die Ableitungsfunktion der Ableitung $f'(x)$ heisst die **zweite Ableitung** und wird mit mit $f''(x)$, $f^{(2)}(x)$ oder $\dfrac{d^2 f(x)}{dx^2}$ bezeichnet.

Ableitungsregeln Grundfunktionen		$f(x)$	$\rightarrow$	$f'(x)$
	Potenzfunktionen	x^n	$\rightarrow$	nx^{n-1}
		x	$\rightarrow$	1
		c	$\rightarrow$	0
		$c \cdot x$	$\rightarrow$	c
		$\sqrt{x}$	$\rightarrow$	$\dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$
		$\dfrac{c}{x}$	$\rightarrow$	$-\dfrac{c}{x^2}$
	Exponentialfunktionen	e^x	$\rightarrow$	e^x
		e^{cx}	$\rightarrow$	$e^{cx} \cdot c$
		c^x	$\rightarrow$	$c^x \cdot \ln(c)$
	Logarithmusfunktionen	$\ln(x)$	$\rightarrow$	$\dfrac{1}{x}$
		$\log_c(x)$	$\rightarrow$	$\dfrac{1}{x \cdot \ln(c)}$
	Trigonometr. Funktionen	$\sin(x)$	$\rightarrow$	$\cos(x)$
		$\cos(x)$	$\rightarrow$	$-\sin(x)$
		$\tan(x)$	$\rightarrow$	$1 + \tan^2(x)$

Ableitungsregeln Zusammensetzungen		$f(x)$	$\rightarrow$	$f'(x)$
	Summenregel	$u(x) \pm v(x)$	$\rightarrow$	$u'(x) \pm v'(x)$
		$u(x) \pm v(x) \pm w(x)$	$\rightarrow$	$u'(x) \pm v'(x) \pm w'(x)$
	Konstantenregeln	$c \cdot u(x)$	$\rightarrow$	$c \cdot u'(x)$
		$\dfrac{u(x)}{c}$	$\rightarrow$	$\dfrac{u'(x)}{c}$
		c	$\rightarrow$	0
	Produktregel	$u(x) \cdot v(x)$	$\rightarrow$	$u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
		$u(x) \cdot v(x) \cdot w(x)$	$\rightarrow$	$u'(x) \cdot v(x) \cdot w(x)$ $+ u(x) \cdot v'(x) \cdot w(x)$ $+ u(x) \cdot v(x) \cdot w'(x)$
	Quotientenregel	$\dfrac{u(x)}{v(x)}$	$\rightarrow$	$\dfrac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2}$
		$\dfrac{u(x)}{c}$	$\rightarrow$	$-\dfrac{u'(x)}{c}$
		$\dfrac{c}{v(x)}$	$\rightarrow$	$-\dfrac{c \cdot v'(x)}{v(x)^2}$
	Kettenregel	$u(v(x))$	$\rightarrow$	$u'(v(x)) \cdot v'(x)$
		$u(v(w(x)))$	$\rightarrow$	$u'(v(w(x))) \cdot v'(w(x)) \cdot w'(x)$

Bedeutung der Ableitung	**y-Wert** = **Funktionswert** $f(x)$ $f(x) > 0 \Leftrightarrow$ P. oberhalb x-Achse; $f(x) < 0 \Leftrightarrow$ P. unterh. x-Achse; $f(x) = 0 \Leftrightarrow$ Nullstelle. **Steigung** $f'(x)$ $f'(x) > 0 \Leftrightarrow$ Kurve steigend; $f'(x) < 0 \Leftrightarrow$ Kurve fallend; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow$ stationäre Stelle. Modifizierte **Krümmung** $f''(x)$ $f''(x) > 0 \Leftrightarrow$ Linkskurve; $f''(x) < 0 \Leftrightarrow$ Rechtskurve; $f''(x) = 0 \Leftrightarrow$ Kurve ungekrümmt.
Kurven-diskussion	1) **Nullstellen** $f(x) \stackrel{!}{=} 0$ Eine Nullstelle heisst von Ordnung n, falls $f(x) = f'(x) = \ldots f^{(n-1)}(x) = 0$ aber $f^{(n)}(x) \neq 0$ 2) **Extrema** $f'(x) \stackrel{!}{=} 0$ gilt $\begin{cases} f''(x) < 0 & \Rightarrow \textbf{lokales Maximum} \\ f''(x) > 0 & \Rightarrow \textbf{lokales Minimum} \\ f''(x) = 0 & \Rightarrow (*) \end{cases}$ $(*)$ Verhalten der Ableitung $f'(x)$ für wachsende x-Werte beim Durchgang durch die untersuchte Stelle ... $f'(x)$ wechselt das Vorzeichen von $+$ über 0 zu $-$ $\Rightarrow$ lokales Maximum $f'(x)$ wechselt das Vorzeichen von $-$ über 0 zu $+$ $\Rightarrow$ lokales Minimum $f'(x)$ wechselt das VZ von $+$ über 0 zu $+$ nicht oder von $-$ über 0 zu $-$ nicht $\Rightarrow$ **Terrassenpunkt** 3) **Wendepunkte** $f''(x) \stackrel{!}{=} 0$ gilt $\begin{cases} f'''(x) \neq 0 & \Rightarrow \textbf{Wendepunkt} \\ f'''(x) = 0 & \Rightarrow (**) \end{cases}$ $(**)$ Verhalten der Ableitung $f''(x)$ für wachsende x-Werte beim Durchgang durch die untersuchte Stelle ... $f''(x)$ wechselt das Vorzeichen von $+$ über 0 zu $-$ oder von $-$ über 0 zu $+$ $\Rightarrow$ **Wendepunkt** $f''(x)$ wechselt das VZ von $+$ über 0 zu $+$ nicht oder von $-$ über 0 zu $-$ nicht $\Rightarrow$ kein Wendepunkt **Sattelpunkt** = **Terrassenpunkt** = Wendepunkt mit Steigung 0
Tangente	**Tangente** an der Stelle x_1 $\hookrightarrow y = f(x_1) + f'(x_1) \cdot (x - x_1)$
Newton-verfahren	Gesucht sind die Lösungen der Gleichung $f(x) = 0$ **Näherungsverfahren von Newton (Tangentenverfahren)**. 1) Wähle Startpunkt x_1 2) Berechne $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$. 3) Falls $x_2 = x_1$ dann ist x_2 eine Lösung von $f(x) = 0$, andernfalls verwende das erhaltene x_2 als neues x_1 und gehe zu 2). 

10 Integralrechnung

Definition	1) Das **unbestimmtes Integral** $\int f(x)\cdot dx$ ist eine Menge von Funktionen. $\int f(x)\cdot dx =$ Menge aller **Stammfunktionen** von $f(x)$ $=$ Menge aller Funktionen $F(x)$ mit Eigenschaft $F'(x) = f(x)$. Ist $F_1(x)$ irgend eine Stammfunktion von $f(x)$, so ist jede weitere Stammfunktion von der Form $F(x) = F_1(x) + C$ mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$. Man schreibt $\int f(x)\cdot dx = F_1(x) + C$. C heisst **Integrationskonstante**. 2) Das **bestimmte Integral** $\int\limits_a^b f(x)\cdot dx$ ist eine Zahl. a und b heissen die **Integrationsgrenzen**. $\int\limits_a^b f(x)\cdot dx =$ Flächeninhalt eingeschlossen von unten durch die x-Achse von oben durch die Kurve $y = f(x)$ von links durch die Gerade $x = a$ und von rechts durch die Gerade $x = b$. Flächenstücke unter der x-Achse haben **negatives Vorzeichen**. Ebenso wechselt das Vorzeichen, wenn linke und rechte **Grenze vertauscht** sind.
Hauptsatz	**Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung** Bezeichne $F(x)$ irgend eine Stammfunktion von $f(x)$, also $F(x) \in \int f(x)\cdot dx$ (unbestimmtes Integral). Dann gilt $\int\limits_a^b f(x)\cdot dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ (bestimmtes Integral). Der Hauptsatz führt somit das bestimmte Integral auf das unbestimmte Integral zurück!
Zusammen-setzen	**Unterteilen** $\int\limits_a^b f(x)\cdot dx = \int\limits_a^c f(x)\cdot dx + \int\limits_c^b f(x)\cdot dx$ **Vertauschte Grenzen** $\int\limits_b^a f(x)\cdot dx = -\int\limits_a^b f(x)\cdot dx$ **Leeres Integral** $\int\limits_a^a f(x)\cdot dx = 0$
Anwend-ungen	**Fläche** zwischen Kurve und x-Achse $A = \int\limits_a^b f(x)\cdot dx$ **Volumen** bei Rotation um x-Achse $V_x = \pi\cdot\int\limits_a^b y^2\cdot dx = \pi\cdot\int\limits_a^b f(x)^2\cdot dx$ Zwischen zwei Kurven ... **Fläche** $A = \int\limits_a^b (f(x) - g(x))\cdot dx$ ... **Volumen** bei Rotation um x-Achse $V_x = \pi\cdot\int\limits_a^b (f(x)^2 - g(x)^2)\cdot dx$  

Anwendungen (Fortsetzung)	**Volumen** bei Rotation um y-Achse $V_y = \pi \cdot \int\limits_c^d x^2 \cdot dy = \pi \cdot \int\limits_a^b x^2 f'(x) \cdot dx$ **Bogenlänge** $\ell = \int\limits_a^b \sqrt{1+f'(x)^2} \cdot dx$ **Oberfläche** bei Rotation um x-Achse $O_x = 2\pi \cdot \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2} \cdot dx$ **Oberfläche** bei Rotation um y-Achse $O_y = 2\pi \cdot \int\limits_a^b x\sqrt{1+f'(x)^2} \cdot dx$

Integrationsregeln Grundfunktionen

	$f(x)$	$\to$	$F(x)$
Potenzfunktionen	$x^n \quad (n \neq -1)$	$\to$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
	$\frac{c}{x} = c \cdot x^{-1}$	$\to$	$c \cdot \ln(\|x\|)$
	c	$\to$	cx
	cx	$\to$	$\frac{c \cdot x^2}{2}$
	$\sqrt{x} = x^{1/2}$	$\to$	$\frac{x^{3/2}}{3/2} = \frac{2x^{3/2}}{3}$
	$\frac{c}{x^2} = c \cdot x^{-2}$	$\to$	$\frac{c \cdot x^{-1}}{-1} = -\frac{c}{x}$
Exponentialfunktionen	e^x	$\to$	e^x
	e^{cx}	$\to$	$\frac{e^{cx}}{c}$
	e^{-x}	$\to$	$\frac{e^{-x}}{-1} = -e^{-x}$
	c^x	$\to$	$\frac{c^x}{\ln(c)}$
	$x \cdot e^{cx}$	$\to$	$\frac{cx-1}{c^2} \cdot e^{cx}$
	$x \cdot c^x$	$\to$	$\frac{x\ln(c)-1}{(\ln(c))^2} \cdot c^x$
Logarthmenfunktionen	$\ln(x)$	$\to$	$x \cdot (\ln(x)-1)$
	$\log_c(x)$	$\to$	$\frac{x \cdot (\ln(x)-1)}{\ln(c)}$
Trigono. Funktionen	$\sin(x)$	$\to$	$-\cos(x)$
	$\cos(x)$	$\to$	$\sin(x)$
	$\tan(x)$	$\to$	$-\ln(\|\cos(x)\|)$
Normalverteilung	normalpdf(x, μ, σ)	$\to$	normalcdf$(-1\text{E}99, x, \mu, \sigma)$

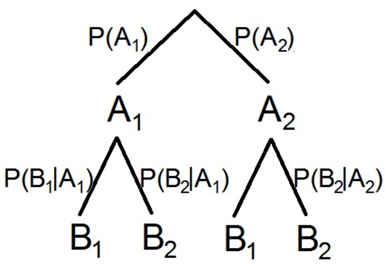
Integrationsregeln Zusammensetzungen

	$f(x)$	$\to$	$F(x)$
Summenregel	$u(x) \pm v(x)$	$\to$	$U(x) \pm V(x)$
Summenregel	$u(x) \pm v(x) \pm w(x)$	$\to$	$U(x) \pm V(x) \pm W(x)$
Konstantenregeln	$c \cdot u(x)$	$\to$	$c \cdot U(x)$
	$\frac{u(x)}{c}$	$\to$	$\frac{U(x)}{c}$
	c	$\to$	cx
Lin. Kettenregel	$u(c_1x + c_2)$	$\to$	$\frac{U(c_1x+c_2)}{c_1}$

11 Kombinatorik

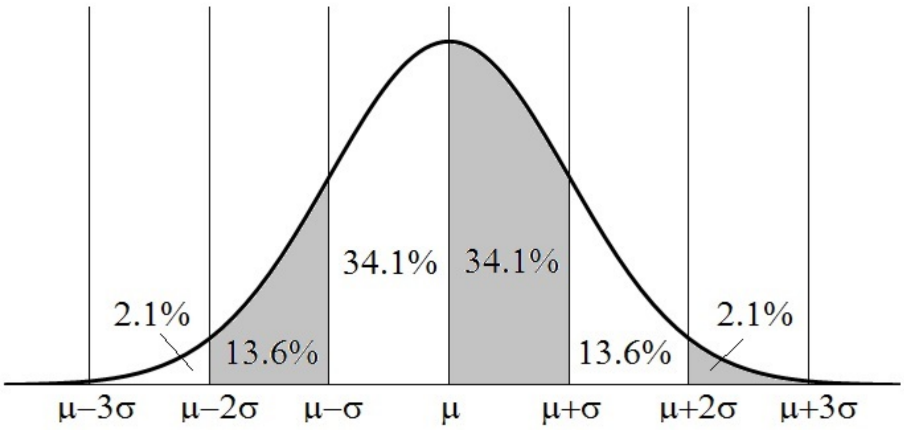
Permutationen	$\boxed{1}$ Wieviele verschiedene Worte lassen sich aus n Zeichen unter Verwendung aller n Zeichen bilden, wenn **alle Zeichen verschieden** sind? $\hookrightarrow n!$ $\quad$ n Fakultät $= n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ $\boxed{2}$ Wieviele verschiedene Worte lassen sich aus n Zeichen unter Verwendung aller n Zeichen bilden, wenn jeweils k_1, k_2 ,..., k_s **Zeichen identisch** sind? $\hookrightarrow \dfrac{n!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_s!}$
Variationen	$\boxed{1}$ Wieviele verschiedene Worte der Länge s lassen sich aus einem Zeichensatz von n verschiedenen Zeichen bilden? Bei erlaubter **Mehrfachverwendung** der Symbole $\hookrightarrow n^s$ $\boxed{2}$ Wieviele verschiedene Worte der Länge s lassen sich aus einem Zeichensatz von n verschiedenen Zeichen bilden? Bei **Einfachverwendung** der Symbole $\hookrightarrow \dfrac{n!}{(n-s)!}$ $\quad$ es gilt $\dfrac{n!}{(n-s)!} = \dbinom{n}{s} \cdot s!$
Kombinationen	$\boxed{1}$ Auf wieviele Arten kann man aus n Objekten s aussuchen? Es kommt dabei nicht auf die Reihenfolge des Aussuchens an. $\hookrightarrow \dbinom{n}{s}$ $\quad$ Binomialkoeffizient $\dbinom{n}{s} = \dfrac{n \cdot (n-1) \ldots \cdot (n-s+1)}{s!} = \dfrac{n!}{(n-s)! \cdot s!}$ $\boxed{2}$ Auf wieviele Arten kann man aus n Objekten s aussuchen? Es kommt dabei nicht auf die Reihenfolge des Aussuchens an. Die Objekte dürfen jetzt aber auch **mehrfach gewählt** werden! $\hookrightarrow \dbinom{n+s-1}{s}$

12 Wahrscheinlichkeitsrechnung

<table>
<tr><td>Begriffe</td><td>Ereignisse = Teilmengen der Grundmenge Ω.
Ω heisst das sichere Ereignis, $\phi = \{\}$ heisst das unmögliche Ereignis.
Das Gegenereignis oder Komplement eines Ereignisses A ist $\overline{A} = \Omega \backslash A$.
Elementarereignisse sind einelementige Teilmengen der Grundmenge Ω.
Die Funktion P ordnet jedem Ereignis seine Wahrscheinlichkeit zu.</td></tr>
<tr><td>Eigen-
schaften
von P</td><td>$\boxed{1}$ $\mathsf{P}(A) \geq 0$
$\boxed{2}$ $\mathsf{P}(\phi) = 0$
$\boxed{3}$ $\mathsf{P}(\Omega) = 1$
$\boxed{4}$ Additivität $P(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B)$
$\boxed{5}$ $A \subseteq B \Rightarrow \mathsf{P}(A) \leq \mathsf{P}(B)$
$\boxed{6}$ Gegenereignis $\mathsf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathsf{P}(A)$
$\boxed{7}$ Inklusions-Exklusions-Formel
$\mathsf{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \mathsf{P}(A_1) + \mathsf{P}(A_2) + \mathsf{P}(A_3)$
$-\mathsf{P}(A_1 \cap A_2) - \mathsf{P}(A_1 \cap A_3) - \mathsf{P}(A_2 \cap A_3)$
$+\mathsf{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$</td></tr>
<tr><td>Laplace-
Definition</td><td>Laplacedefinition der Wahrscheinlichkeit
Voraussetzung: Alle Elementarereignisse sind gleich wahrscheinlich.
Dann rechnet sich die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis A als
$\mathsf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{günstige Fälle für } A}{\text{mögliche Fälle}}$</td></tr>
<tr><td>Baum-
diagramm</td><td>Die 3 Pfadregeln
$\boxed{1}$ Wahrscheinlichkeiten längs der Pfade werden multipliziert.
$\boxed{2}$ Wahrscheinlichkeiten verschiedender Pfade werden addiert.
$\boxed{3}$ Alle Äste unterhalb eines Knotens addieren sich zu Wahrscheinlichkeit 1.

</td></tr>
<tr><td>Bedingte
Wahr-
schein-
lichkeit</td><td>Bedingte Wahrscheinlichkeit
$\mathsf{P}(A \mid B)$ = Wahrscheinlichkeit, dass Ereignis A eintrifft,
wenn man schon weiss, dass Ereignis B eintrifft.
$P(A \mid B) = \frac{\mathsf{P}(A \cap B)}{\mathsf{P}(B)}$
A und B heissen unabhängig, falls
$\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A) \cdot \mathsf{P}(B)$.
Dies hat nämlich zur Folge
$\mathsf{P}(A \mid B) = \mathsf{P}(A \mid \overline{B}) = \mathsf{P}(A)$ (falls $0 < \mathsf{P}(B) < 1$) und
$\mathsf{P}(B \mid A) = \mathsf{P}(B \mid \overline{A}) = \mathsf{P}(B)$ (falls $0 < \mathsf{P}(A) < 1$)</td></tr>
</table>

Multiplikations- und Additionssatz	**Multiplikationssatz** $P(A \cap B) = \mathsf{P}(A \mid B) \cdot \mathsf{P}(B)$ Für **unabhängige Ereignisse** gilt sogar $\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A) \cdot \mathsf{P}(B)$ **Additionssatz** $P(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B)$ Für **unvereinbare Ereignisse** gilt sogar $\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B)$ --- Sei Ω in die unvereinbaren Ereignisse A_j zerlegt, also $\Omega = \bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j$. Für jedes Ereignis B gelten dann **Formel von der totalen (= unbedingten) Wahrscheinlichkeit** $\mathsf{P}(B) = \sum\limits_{j=1}^{n} \mathsf{P}(B \mid A_j) \cdot \mathsf{P}(A_j)$ **Formel von Bayes** $\mathsf{P}(A_j \mid B) = \dfrac{\mathsf{P}(B \mid A_j) \cdot \mathsf{P}(A_j)}{\sum\limits_{j=1}^{n} \mathsf{P}(B \mid A_j) \cdot \mathsf{P}(A_j)}$ Die beiden Formeln ergeben sich alternativ auch direkt am Baumdiagramm!
Diskrete Zufallsvariablen	Eine **diskrete Zufallsvariable** X nimmt die Werte x_k mit den Wahrscheinlichkeiten p_k an $(1 \leq k \leq n)$, man spricht von der **Wahrscheinlichkeitsverteilung** von X. **Wahrscheinlichkeit** $\mathsf{P}(a \leq X \leq b) = \sum\limits_{a \leq x_k \leq b} p_k$ **Erwartungswert** $\mu = \mathsf{E}(X) = \sum\limits_{k=1}^{n} (x_k \cdot p_k)$ **Varianz** $\sigma^2 = \mathsf{V}(X) = \sum\limits_{k=1}^{n} ((x_k - \mu)^2 \cdot p_k)$ **Standardabweichung** $\sigma = \mathsf{S}(X) = \sqrt{\mathsf{V}(X)}$ **Verschiebungssatz** $\mathsf{V}(X) = \mathsf{E}(X^2) - \mathsf{E}(X)^2$ --- **Erwartungswertoperator** $\mathsf{E}(g(X)) = \sum\limits_{k=1}^{n} (g(x_k) \cdot p_k)$
Stetige Zufallsvariablen	Eine **stetige Zufallsvariable** X hat die **Wahrscheinlichkeitsdichte-funktion** $f(x)$ **Wahrscheinlichkeit** $\mathsf{P}(a \leq X \leq b) = \int\limits_a^b f(x) \cdot dx$ Da $P(X = a) = 0$ für eine stetige Zufallsvariable gilt, folgt dass auch $\mathsf{P}(a < X < b) = \mathsf{P}(a \leq X \leq b)$ gilt. **Erwartungswert** $\mu = \mathsf{E}(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) \cdot dx$ **Varianz** $\sigma^2 = \mathsf{V}(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x) \cdot dx$ **Standardabweichung** $\sigma = \mathsf{S}(X) = \sqrt{\mathsf{V}(X)}$ **Verschiebungssatz** $\mathsf{V}(X) = \mathsf{E}(X^2) - \mathsf{E}(X)^2$ --- **Erwartungswertoperator** $\mathsf{E}(g(X)) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f(x) \cdot dx$

Binomial-verteilung	**Charakterisierung** $\hookrightarrow$ Ein Versuch mit zwei mögliche Ausgängen (Treffer mit Wahrscheinlichkeit p und Niete mit Wahrscheinlichkeit $1-p$) wird n mal unabhängig wiederholt. Die Zufallsvariable X ist die Anzahl der in den n Versuchen erzielten Treffer. X ist eine diskrete Zufallsvariable. **Wahrscheinlichkeit für k Treffer** $\hookrightarrow$ $\mathsf{P}(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}=\mathsf{binompdf}(n,p,k)$ **Wahrscheinlichkeit für mindestens einen Treffer** $\hookrightarrow$ $\mathsf{P}(X\geq 1)=1-(1-p)^n$ **Wahrscheinlichkeit höchstens b Treffer** $\hookrightarrow$ $\mathsf{P}(X\leq b)=\mathsf{binomcdf}(n,p,b)$ **Wahrscheinlichkeit mindestens a Treffer** $\hookrightarrow$ $\mathsf{P}(X\geq a)=1-\mathsf{binomcdf}(n,p,a-1)$ **Wahrscheinlichkeit für zwischen a und b Treffer** $\hookrightarrow$ $\mathsf{P}(a\leq X\leq b)=\mathsf{binomcdf}(n,p,b)-\mathsf{binomcdf}(n,p,a-1)$ **Erwartungswert** $\hookrightarrow$ $\mathsf{E}(X)=\mu=n\cdot p$ **Varianz** $\hookrightarrow$ $\mathsf{V}(X)=\sigma^2=n\cdot p\cdot(1-p)$ **Standardabweichung** $\hookrightarrow$ $\mathsf{S}(X)=\sigma=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}$
Geo-metrische Verteilung	**Charakterisierung** $\hookrightarrow$ Ein Versuch mit zwei mögliche Ausgängen (Treffer mit Wahrscheinlichkeit p und Niete mit Wahrscheinlichkeit $1-p$) wird so lange wiederholt, bis der erste Treffer erscheint. Die Zufallsvariable X ist die Anzahl gebrauchter Versuche bis zum ersten Treffer. X ist eine diskrete Zufallsvariable. **Wahrscheinlichkeit für k gebrauchte Versuche** $\hookrightarrow$ $\mathsf{P}(X=k)=p\cdot(1-p)^{k-1}$ **Erwartungswert** $\hookrightarrow$ $\mathsf{E}(X)=\mu=\frac{1}{p}$ **Varianz** $\hookrightarrow$ $\mathsf{V}(X)=\sigma^2=\frac{1-p}{p^2}$ **Standardabweichung** $\hookrightarrow$ $\mathsf{S}(X)=\sigma=\sqrt{\frac{1-p}{p^2}}$
Hypergeo-metrische verteilung	**Charakterisierung** $\hookrightarrow$ Aus einer Urne, enthaltend w weisse und s schwarze Kugeln, werden (ohne Zurücklegen) n Kugeln gezogen. Die Zufallsvariable X ist die Anzahl der weissen Kugeln unter den n gezogenen. X ist eine diskrete Zufallsvariable. **Wahrscheinlichkeit für k weisse Kugeln** $\hookrightarrow$ $\mathsf{P}(X=k)=\frac{\binom{w}{k}\cdot\binom{s}{n-k}}{\binom{w+s}{n}}$ **Erwartungswert** $\hookrightarrow$ $\mathsf{E}(X)=\mu=\frac{n\cdot w}{w+s}$ **Varianz** $\hookrightarrow$ $\mathsf{V}(X)=\sigma^2=\frac{(w+s-n)\cdot n\cdot w\cdot s}{(w+s-1)\cdot(w+s)^2}$ **Standardabweichung** $\hookrightarrow$ $\mathsf{S}(X)=\sigma=\sqrt{\frac{(w+s-n)\cdot n\cdot w\cdot s}{(w+s-1)\cdot(w+s)^2}}$

Normal-verteilung	**Zentraler Grenzwertsatz** $\hookrightarrow$ Ein Versuch (Zufallsvariable X) wird n-fach unabhängig wiederholt. Die X_i für $1 \leq i \leq n$ seien die erzielten Resultate. 1) Die **Summe** $\mathsf{S}_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ ist für grosses n annähernd normalverteilt mit $\mu = n \cdot \mathsf{E}(X)$ und $\sigma = \sqrt{n \cdot \mathsf{V}(X)}$. 2) Der **Mittelwert** $\overline{X}_n = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ ist für grosses n annähernd normalverteilt mit $\mu = \mathsf{E}(X)$ und $\sigma = \sqrt{\dfrac{\mathsf{V}(X)}{n}}$.
	Die **Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion** einer Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ ist die **Gausssche Glockenkurve** normalpdf$(x, \mu, \sigma) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ 
	normalcdf(a, x, μ, σ), für beliebiges a, ist eine **Stammfunktion** von normalpdf(x, μ, σ).
	Für eine $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$-verteilte Zufallsvariable X gilt **Wahrscheinlichkeit** $\hookrightarrow$ $\mathsf{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b$ normalpdf$(x, \mu, \sigma) \cdot dx =$ normalcdf(a, b, μ, σ) Bemerkung: Da $\mathsf{P}(X = a) = P(X = b) = 0$ ist, folgt $\mathsf{P}(a < X < b) = \mathsf{P}(a \leq X \leq b)$ Bemerkung: $-\infty = -1\text{E}99$ bzw. $\infty = 1\text{E}99$ **Erwartungswert** $\hookrightarrow$ $\mathsf{E}(X) = \mu$ **Varianz** $\hookrightarrow$ $\mathsf{V}(X) = \sigma^2$ **Standardabweichung** $\hookrightarrow$ $\mathsf{S}(X) = \sigma$

13 Beschreibende Statistik

<table>
<tr>
<td>Kennwerte schätzen</td>
<td>

An einer **Stichprobe** treten für das **Merkmal** X die k Werte x_i $(i = 1, \ldots, k)$ mit den Häufigkeiten n_i auf.

Die Anzahl Einzelresultate $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ heisst der **Umfang** der Stichprobe.

Es wird angenommen, dass die Stichprobe durch zufällige Wahl aus der **Grundgesamtheit** gezogen wurde.

Die Stichprobe heisst dann **repräsentativ** für die Grundgesamtheit.

Aus der Messung lassen sich folgende **Kennwerte** für das Merkmal X in der Grundgesamtheit schätzen:

1 **Erwartungswert** E(X) $\hookrightarrow \overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} (x_i \cdot n_i)}{n}$

2 **Varianz** V(X) $\hookrightarrow s^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} ((x_i - \overline{x})^2 \cdot n_i)}{n-1}$

3 **Standardabweichung** S(X) $\hookrightarrow s = \sqrt{s^2}$

4 **q-Quantil**

$\hookrightarrow$ (1) Ordne die Resultate aufsteigend (Rang 1 bis Rang n).

(2) Berechne $q \cdot (n+1)$ und zerlege das Resultat in ganzzahlingen Teil g und Hinterkommateil r.

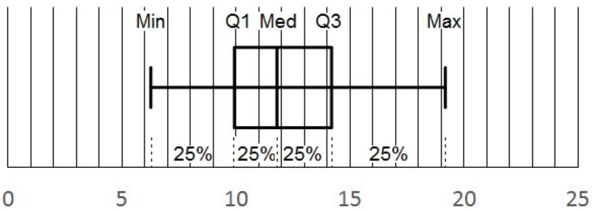
(3) q-Quantil = 'Messwert Rang g' $+r \cdot$ ('Messwert Rang $g+1$' $-$ 'Messwert Rang g')

5 Der **Median** ist das 0.5-Quantil.

6 Das **erste Quartil** (=erstes Viertel) ist das 0.25-Quantil.

7 Das **dritte Quartil** (=drittes Viertel) ist das 0.75-Quantil.

8 Im **Boxplot** zeichnet man den kleinsten Messwert (Min), das erste Quartil (Q1), den Median (Med), das dritte Quartil (Q3) und den grössen Messwert (Max) ein. Der Boxplot gibt einen groben Überblick über die Verteilung der Messresultate.



</td>
</tr>
<tr>
<td>Lineare Regression</td>
<td>

Gegeben sind die Datenpaare (x_i, y_i) für $i = 1, \ldots n$.

Den besten* linearen Zusammenhang $\hat{y}(x) = mx + b$ findet man, indem man m und b aus dem folgenden linearen Gleichungssystem ermittelt.

$$\left| \begin{array}{rcl} (\sum_{i=1}^{n} x_i) \cdot m + (\sum_{i=1}^{n} 1) \cdot b & = & \sum_{i=1}^{n} y_i \\ (\sum_{i=1}^{n} x_i^2) \cdot m + (\sum_{i=1}^{n} x_i) \cdot b & = & \sum_{i=1}^{n} (x_i \cdot y_i) \end{array} \right|$$

* in dem Sinne, dass die Summe der quadratischen Abweichungen $\sum_{i=1}^{n} (\hat{y}(x_i) - y_i)^2$ minimal wird.

</td>
</tr>
</table>

14 Das Griechische Alphabet

Die 24 Griechischen Buchstaben

	Name	gross	klein	♩		Name	gross	klein	♩
1	Alpha	A	α	a	13	Nü	N	ν	n
2	Beta	B	β	b	14	Xi	Ξ	ξ	x
3	Gamma	Γ	γ	g	15	Omikron	O	o	o
4	Delta	Δ	δ	d	16	Pi	Π	π	p
5	Epsilon	E	ϵ	e	17	Rho	P	ρ	r(h)
6	Zeta	Z	ζ	z	18	Sigma	Σ	σ	s
7	Eta	H	η	ē	19	Tau	T	τ	t
8	Theta	Θ	θ	th	20	Ypsilon	Y	υ	y oder u
9	Iota	I	ι	i	21	Phi	Φ	ϕ	ph
10	Kappa	K	κ	k	22	Chi	X	χ	ch
11	Lambda	Λ	λ	l	23	Psi	Ψ	ψ	ps
12	Mü	M	μ	m	24	Omega	Ω	ω	ō

15 Mathematische Symbole

Mathematische Symbole

Symbol	Bedeutung	Bereich
π	Kreiszahl 3.1415926535...	
e	Eulersche Zahl 2.7182818284...	
$\wedge$	und	Logik
$\vee$	oder	Logik
$\neg$	nicht	Logik
$\forall$	für alle	Logik
$\exists$	es exisitert ein	Logik
$\cup$	vereinigt	Mengenlehre
$\cap$	geschnitten	Mengenlehre
$\setminus$	ohne	Mengenlehre
$\in$	ist Element von	Mengenlehre
$\subseteq$	ist Teilmenge von	Mengenlehre
$\supseteq$	ist Obermenge von	Mengenlehre
ϕ	Leere Menge	Mengenlehre
$\sum$	Summe	Algebra
$\prod$	Produkt	Algebra
Δ	Differenz	Algebra
!	Fakultät	Kombinatorik
$\binom{n}{s}$	'n tief s', Binomialkoeffizient	Kombinatorik