Fachhochschule Nordwestschweiz
Hochschule für Wirtschaft

Intuitive Darstellung in der Vektorgeometrie

Vorschlag für eine schülerfreundliche, intuitive Darstellung in der Vektorgeometrie

Anregung

Autor: Helmut Vetter
Ort, Datum: Arlesheim, 05.10.2017

Diese Arbeit wurde mit TexLive erstellt.

Intuitive Darstellung in der Vektorgeometrie

Autor
Vetter, Helmut
Schillerweg 2
CH-4144 Arlesheim
061 599 51 09
helmut.vetter@fhnw.ch

Auftraggeberschaft
Fachhochschule für Wirtschaft
Vetter, Helmut

Arlesheim, Oktober 2017

Management Summary

An vielen Schulen ist der Umgang mit Vektoren in der Geometrie zu wenig intuitiv.
Obwohl den meisten Lehrern der Inhalt des vorliegenden kleinen Textes klar ist, scheuen sich viele davor, den Schritt auch im Unterricht zu machen und Klammern sich an die Ortsvektoren, um ja nichts (vielleicht) Unerlaubtes zu tun.
Hier soll das natürliche Zusammenspiel von Vektoren und Punkten auf ein mathematisches Fundament gestellt werden.

Vorschlag für eine schülerfreundliche, intuitive Darstellung der Vektorgeometrie

$\boxed{1}$ Mathematische Grundlage

Die Gruppe $(V, +)$ der n-dimensionalen Vektoren operiert durch Translation auf dem Raum $\mathbb{R}^n$ der n-dimensionalen Punkte. Für $\overrightarrow{v} \in V$ und $P \in \mathbb{R}^n$ ist $t(\overrightarrow{v}, P)$ der Bildpunkt des längs des Vektors $\overrightarrow{v}$ verschobenen Punktes P. Man schreibt dafür einprägsamer $P + \overrightarrow{v}$.

Offensichtlich handelt es sich hierbei um eine Gruppenoperation.
Beweis:
1) $t(\overrightarrow{w}, t(\overrightarrow{v}, P)) = ((P + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w}) = P + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = t(\overrightarrow{w} + \overrightarrow{v}, P)$.
2) $t(\overrightarrow{0}, P) = P + \overrightarrow{0} = P$.

$\boxed{2}$ Die Berechnung auf dem Blatt wird erleichtert, wenn man anstelle von P sein Transponiertes P^T notiert. Da die Bezeichnung $\overrightarrow{P}$ bisher undefiniert ist, ist es naheliegend die Bezeichnung $\overrightarrow{P} := P^T$ einzuführen. $\overrightarrow{P}$ kann auch als Ortsvektor $\overrightarrow{OP}$ von P interpretiert werden.

$\boxed{3}$ Man erweitert somit den Horizont: Es gibt als Operanden Vektoren und Punkte.
Als 'neue' Operationen sind möglich:
1) Die Differenz zweier Punkte ergibt einen Vektor.
2) Punkt plus Vektorkombination ergibt einen Punkt.
3) $\sum\limits_{k=1}^{n} g_k \cdot P_k$ mit $n \in \mathbb{N}$, $g_k \in \mathbb{R}$ und $\sum\limits_{k=1}^{n} g_k = 1$ ergibt einen Punkt!

Punkt 3) hat im Unterricht nur untergeordnete Bedeutung. Er zeigt aber, dass z.B. der Schwerpunkt eines Dreieck als Mittelwert ($g_1 = g_2 = g_3 = \frac{1}{3}$) der drei Eckpunkte definiert werden kann.

$\boxed{4}$ Vorteile dieser Erweiterung:

Algebraisch: Die Formeln werden übersichtlicher und damit für die Schüler leichter verständlich.

Statt $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$ schreibt man $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{Q} - \overrightarrow{P}$ (Endpunkt minus Anfangspunkt). Die Formel enthält nur $\frac{2}{3}$ der Buchstaben!

Geometrisch: In einer Skizze müssen der Punkt O und die zugehörigen Ortsvektoren nicht eingezeichnet werden, da man über die Punkte selbst als Objekte verfügt und nicht nur über Vektoren! So werden die Skizzen kompakter und bringen die erwünschte intuitive Unterstützung zur Lösung der Aufgabe für die Schüler.

Der Übergang zu der Darstellung mit den Ortsvektoren ergäbe sich ganz einfach, indem man jeden Punkt P (bzw. $\overrightarrow{P}$) durch $\overrightarrow{OP}$ ersetzt.

$\boxed{5}$ Beispiel: Gegeben sind drei Eckpunkte $A(2/1/0)$, $B(7/3/1)$ und $D(3/6/4)$ eines Parallelogrammes. Bestimmen Sie die Koordinaten des vierten Eckpunktes C.

Lösung:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{C} = \overrightarrow{D} + \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Der Punkt C hat die Koordinaten $\underline{\underline{C(8/8/5)}}$.