

10ème Congrès Français d'Acoustique

Lyon, 12-16 Avril 2010

Cartes itérées appliquées à un instrument de type clarinette

Pierre-André Taillard¹, Jean Kergomard², Franck Laloë³, Sami Karkar²

¹ Conservatoire de musique, Avenue Léopold-Robert 34, 2300 La Chaux-de-Fonds, Suisse, taillard@hispeed.ch

² LMA, CNRS UPR 7051, 31, Chemin J. Aiguier - 13402 Marseille Cedex 20, {kergomard, karkar}@lma.cnrs-mrs.fr

³ Laboratoire Kastler Brossel, ENS, UMR CNRS 8552, 24 Rue Lhomond, F-75231 Paris Cedex 05, laloe@lkb.ens.fr

Mc Intyre et coll. (1983) ont montré que l'on peut ramener le calcul des oscillations d'une clarinette à une simple itération, dans un modèle où le résonateur est cylindrique avec des pertes indépendantes de la fréquence, et où l'anche est vue comme un ressort sans inertie. Pour cela on choisit le couple des ondes aller et retour comme variables de base, et le système peut se ramener à l'itération d'une fonction $f(x)$ qui relie les amplitudes de ces ondes, conduisant à des oscillations en signaux carrés. Nous donnons une étude plus approfondie de cette fonction et en déduisons un encadrement des valeurs des paramètres d'excitation pour lesquelles l'anche peut battre, ou encore pour lesquelles le signe du débit peut s'inverser. Les fonctions itérées de la fonction $f(x)$ renseignent notamment sur la stabilité des régimes périodiques, ou aident à comprendre l'existence de régimes chaotiques, de fenêtres de périodicité ou d'intermittences.

1 Introduction

Clarinette et cartes itérées Dans leur article bien connu, Mc Intyre et coll. [1] ont proposé pour les instruments de musique auto-oscillants un modèle générique très simple reposant sur deux éléments : une fonction non linéaire (excitation) et une impédance d'entrée (résonateur, corde ou tuyau). Dans le cas d'un instrument cylindrique à anche simple, de type clarinette, ces deux éléments relient pression dans le bec et débit d'entrée dans le résonateur ; plusieurs articles ont traité d'un cas très simple, où le résonateur est sans pertes ou avec pertes indépendantes de la fréquence (l'anche est vue comme un simple ressort), en calculant des cycles limites à deux états (signaux carrés) et leur stabilité [2, 3, 4, 5, 6]. Dans une annexe, Mc Intyre et coll. remarquent que avec ces hypothèses, si on utilise une fonction de réflexion - onde retour/onde aller - pour caractériser le résonateur, le modèle se ramène à un simple modèle de cartes itérées. La valeur de l'onde aller à deux instants distants de $2\ell/c$ (temps d'aller et retour dans le tuyau, c étant la vitesse du son, et ℓ la longueur) se déduit par simple itération d'une fonction non linéaire. Cette dernière est obtenue par transformation de la fonction non linéaire physique (débit/pression), appelée caractéristique non linéaire et notée ci-après \mathcal{C} , supposée quasi-statique.

C'est cette idée que nous avons souhaité développer, en poussant l'utilisation des itérées plus loin que celles d'ordre 2, les itérées d'ordre plus élevé donnant des informations utiles sur les régimes d'oscillation possibles.

Caractéristique non linéaire \mathcal{C} débit-pression Le choix de la caractéristique \mathcal{C} aujourd'hui le plus courant repose sur un modèle simplifié d'équation de Bernoulli pour l'écoulement dans le canal entre anche et bec, et la création d'un jet à sa sortie [7] (cf fig. 1). La comparaison expérience-théorie a été menée avec succès [8] pour

l'amplitude de la pression acoustique dans le bec dans le cas de sons "normaux", dont l'approximation est un signal carré de fréquence fondamentale $c/4\ell$.

Ceci justifie le choix de cette forme de caractéristique pour l'étude avec les cartes itérées. Cette forme se divise en trois parties :

1. pour les grandes différences de pression entre la bouche de l'instrumentiste et le bec, l'anche plaque (ou bat¹) et le débit est nul (expérimentalement il ne l'est pas tout à fait, mais on peut se contenter de ce modèle) ;

2. pour les différences de pression plus faibles mais positives, le débit dans le canal anche-bec croît comme la racine carrée de la différence de pression (équation de Bernoulli), et donc aussi le débit, mais ce dernier décroît ensuite en raison de la force de rappel de l'anche, jusqu'à s'annuler ;

3. enfin, si la pression dans la bouche est inférieure à celle dans le bec, le débit est négatif ; cette partie du modèle n'a en fait jamais été confrontée à l'expérience. Elle semble surprenante, puisque la source d'énergie est bien la surpression dans la bouche du musicien ; nous discutons cet aspect plus loin.

La figure 1 montre ces trois parties. Elles sont délimitées par les points de contact M_b et d'inversion M_i . Il y a trois paramètres, que nous choisissons sans dimensions, avec les notations d'articles précédents :

1. la pression dans la bouche, supposée constante, notée γ ; elle est toujours positive, et vaut 1 à la limite de placage de l'anche en régime statique ;

2. le débit maximum qui peut entrer dans le tuyau, lié notamment à l'ouverture du canal d'anche au repos et sa raideur, noté ζ ; les expériences montrent qu'il se

¹Nous employons le terme "plaquer" pour le régime statique, l'anche ne décollant pas, et "battre", en régime dynamique.

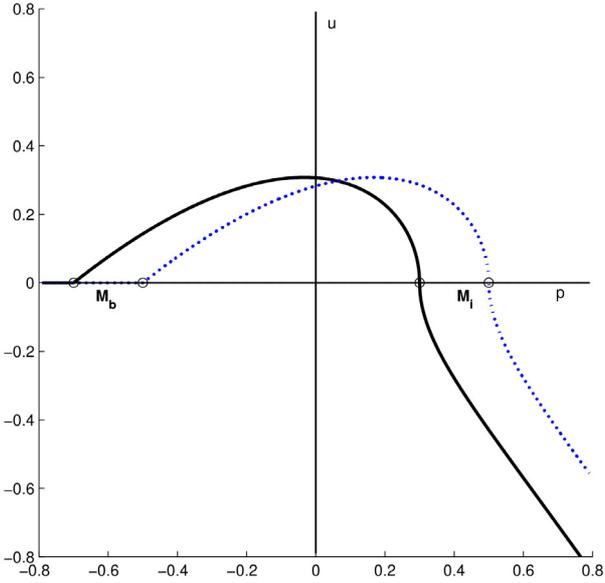


FIG. 1: Caractéristique non linéaire (débit entrant/pression dans le bec) pour une valeur donnée de la pression dans la bouche, supposée constante, $\gamma = 0.3$ (trait plein) et 0.5 (pointillé). Le paramètre $\zeta = 0.8$, n'est qu'un facteur multiplicatif. La fonction physique est en fait une fonction de la différence de pression (bouche - bec); augmenter la pression dans la bouche γ revient donc à translater cette courbe vers la droite. Les deux cercles marquent les limites entre les trois parties de la courbe : la limite de contact anche-bec, M_b , et le point d'inversion du débit, M_i .

situé en général entre 0, 2 et 0, 4, mais ce sont les valeurs élevées qui peuvent produire des régimes “anormaux” (on suppose cependant qu'il est toujours inférieur à l'unité);

3. le paramètre de pertes λ , rapport des amplitudes des ondes (retour/aller), des valeurs typiques étant 0, 9 à 0, 95. Il correspond aux pertes près des parois et par rayonnement, la variation en fréquence étant ignorée.

La simple étude de la fonction non linéaire déduite de la caractéristique \mathcal{C} (cf figure 2) permet de trouver des conditions pour que l'anche puisse battre ou que le débit devienne négatif. C'est l'objet du paragraphe 3, le paragraphe 2 montrant comment on calcule les cartes itérées. Ayant montré un exemple de schéma de bifurcation obtenu par expérience numérique, nous montrons au § 4 l'intérêt des fonctions itérées pour l'étude de la convergence, c.-à-d. de la durée des transitoires, et de la stabilité des régimes (cycles limites).

2 Cartes itérées (calcul ab initio)

La caractéristique \mathcal{C} relie débit u entrant dans le résonateur et pression p dans le bec. D'après la décomposition de d'Alembert, la pression est à chaque instant la somme de l'onde aller p^+ et l'onde retour p^- dans le tuyau, tandis que le débit est leur différence (compte tenu de l'adimensionnement). À l'instant ini-

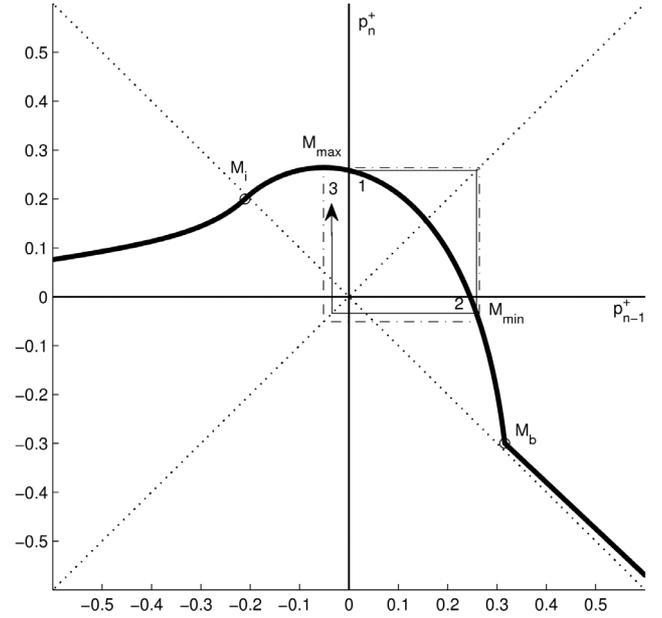


FIG. 2: Fonction non linéaire reliant l'onde aller à l'instant t , notée p_n^+ à l'onde aller à l'instant $t - 2l/c$, p_{n-1}^+ . Les paramètres sont $\gamma = 0.4$ $\zeta = 0.8$ $\lambda = 0.95$. En pointillé le carré limité par les valeurs f_{min} et f_{max} pour l'abscisse et l'ordonnée. Nous montrons aussi le début d'une itération pour une condition initiale donnée (points 1, 2, 3)

tial, on suppose que la pression dans la bouche saute brutalement de $t = 0$ à la valeur notée γ puis reste constante. Pendant la durée $\tau = 2l/c$, temps d'un aller-retour dans le tuyau, il n'y a pas d'onde retour, et on a donc $p = u = p^+$, ce qui avec la caractéristique non linéaire donne la condition initiale, inchangée pendant la durée τ . Puis l'onde retour arrive à l'entrée :

$$p^-(t) = -\lambda p^+(t - \tau). \quad (1)$$

Le signe $-$ vient de la simplification de la condition aux limites (pression nulle). On peut donc en déduire les grandeurs acoustiques pendant l'intervalle $[\tau, 2\tau]$, et ainsi de suite. Il est alors légitime de discrétiser le temps, et de ne considérer que les instants $n\tau$. L'équation (1) est notée :

$$p_n^- = -\lambda p_{n-1}^+. \quad (2)$$

On peut la transformer en une relation entre pression et débit, qui n'est autre qu'une condition d'impédance (transformée dans le domaine temporel, et déduite à chaque instant les valeurs des grandeurs physiques grâce à la caractéristique \mathcal{C} , qui lie u_n à p_n). Ceci est utile en particulier pour rechercher les cycles limites. Mais pour s'intéresser aux transitoires, mieux vaut conserver l'éq. (2) et transformer la fonction non linéaire, en recherchant la fonction liant p_n^+ et p_n^- . On tire alors de ces deux équations la relation de base de la méthode :

$$p_n^+ = f(p_{n-1}^+). \quad (3)$$

L'onde aller est donc obtenue par un simple calcul d'itération de la fonction f , ou carte itérée. La fonction f est obtenue simplement à partir de \mathcal{C} , et l'éq. (3) pour le modèle considéré est une équation du 3^e degré. Dans le cas sans pertes ($\lambda = 1$), la fonction est obtenue par

simple rotation de 45° de \mathcal{C} . Partant de la condition initiale, on peut donc calculer un transitoire (cf figure 2) ou, en faisant varier le paramètre principal, la pression dans la bouche γ , un schéma de bifurcation avec par exemple 1000 pas de temps, c.-à-d. 1000 itérations : pour ce faire, on doit admettre que la convergence a bien eu lieu, ce qui bien entendu n'est pas vrai pour les régimes chaotiques, ou les transitoires très longs.

Un exemple de régime chaotique est montré par la figure 3. Il apparaît comme une sorte de succession de différents régimes à 6 états. La figure 4 montre le spectre FFT pour ce régime : on voit qu'il y a une superposition d'un spectre continu et d'un spectre de raies, contenant principalement la raie principale (fréquence $c/2\ell$). Ceci est classique, car on entend toujours la fréquence du régime de base (à deux états) dans un régime chaotique. La même figure compare ce spectre à celui d'un régime périodique à 6 états, obtenu pour une valeur très proche du paramètre d'excitation γ : on n'a pas non plus exactement un spectre de raies, mais ceci est dû à la troncature du signal.

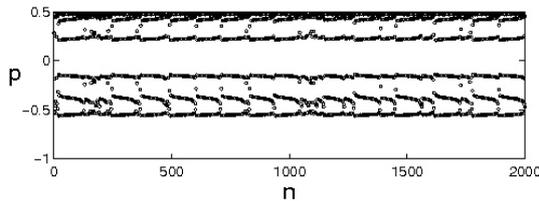


FIG. 3: Valeurs de la pression pour 2000 itérations. On a l'impression d'une succession de régimes à 6 états, la figure 4 montrant que le régime est chaotique. ($\gamma = 0.4664$ $\zeta = 0.8$ $\lambda = 0.95$)

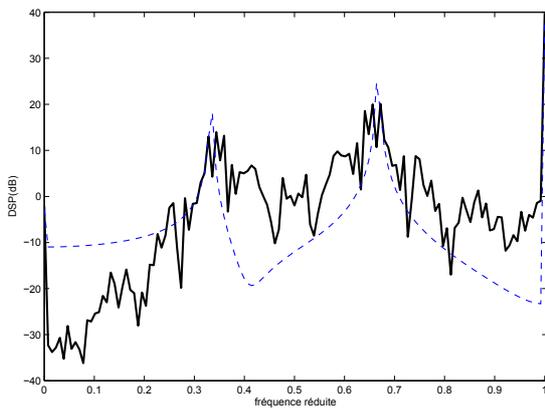


FIG. 4: Spectre de la pression pour le cas montré par la figure 3 en trait plein, comparé à un régime périodique à 6 états, en pointillé ($\gamma = 0.4467$ $\zeta = 0.8$ $\lambda = 0.95$). La fréquence 1, c.-à-d. la fréquence normale de jeu, $c/4\ell$, est très présente.

La figure 5 montre un exemple de schéma de bifurcation : on remarque que le débit peut s'annuler et devenir négatif. La première partie du schéma, jusque environ $\gamma = 0.44$ est un schéma classique de route vers le chaos par doublement de période [9, 10, 11]. Il a été montré que ceci n'est possible qu'avec un grand paramètre ζ ,

et de faibles pertes. Expérimentalement un doublement de période a pu être observé sur certains instruments (cromorne, basson [12]).

À l'intérieur de la plage de régimes chaotiques, on trouve les classiques fenêtres de périodicités, avec des régimes à 6 états (nous n'avons pas trouvé de régimes à 3 états); ensuite on trouve une "cascade à l'envers", qui ramène à des régimes périodiques simples, à 4 états, 2 états ou un état. Ceci s'explique par la dépendance particulière des paramètres de la fonction, les régimes à deux états en anche battante, pour de grandes pressions γ , étant toujours stables. Notons que cette cascade à l'envers doit être distinguée d'une cascade inverse, plus classique, et que l'on trouve dans la plage de régimes chaotiques.

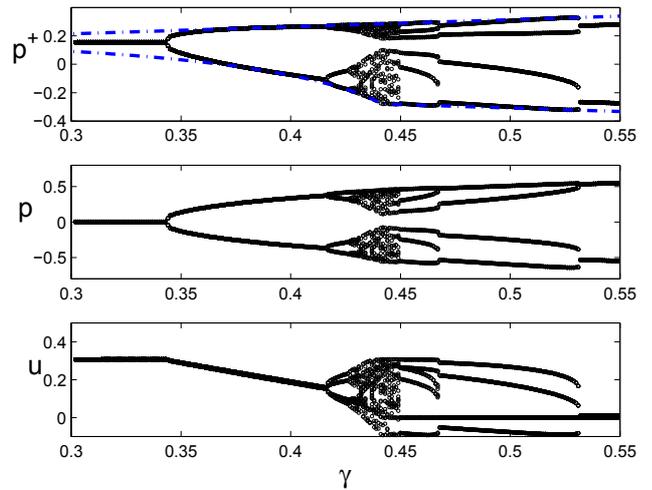


FIG. 5: Schéma de bifurcation obtenu par expérience numérique de 400 itérations pour des valeurs croissantes de la pression dans la bouche γ . En haut l'onde aller p_n^+ , avec en pointillé les valeurs de f_{min} et f_{max} , au milieu la pression p_n , en bas le débit u_n .

3 Propriétés de la fonction non linéaire f (itérée d'ordre 1)

La fonction f présente un maximum f_{max} voisin de $\gamma/2$, qui est unique pour les valeurs de ζ supérieures à $1/\sqrt{3}$. On a $f_{max} = \gamma/2 + A(\zeta)$, où $A(\zeta)$ est une fonction croissante de ζ ($A(0) = 0$, $A(1) = 5/54$). Pour les valeurs inférieures de ζ , il existe un maximum pour les très faibles valeurs de x , qui sont irréalistes, et à partir de quelques itérations, on arrive toujours en pratique dans le carré représenté sur la figure 4. On montre que les limites de ce carré sont $f_{min} = f(f_{max})$, à condition que la fonction coupe le carré sur son côté gauche ($f(f_{min}) > f_{min}$). La figure 5 montre en pointillé les deux valeurs f_{min} et f_{max} qui encadrent les valeurs de l'onde aller p^+ .

Un résultat intéressant est alors obtenu en cherchant à quelle condition portant sur γ , les points de contact M_c et d'inversion M_i sont situés dans le carré. L'anche

ne peut battre qu' à la condition suivante :

$$\gamma > \frac{1 - 2\lambda A(\zeta)}{1 + \lambda}. \quad (4)$$

On peut montrer que cette limite est inférieure à celle qui est appelée "seuil d'anche battante" dans des articles récents (voir par ex. [6]), qui ne considèrent que les régimes à deux états. Pour d'autres types de régimes, l'anche peut battre pour une pression dans la bouche plus faible. C'est ce que l'on voit sur les diagrammes déjà publiés [3]. Précisons que la condition (4) n'est pas suffisante pour que l'anche batte : il faut en outre que les régions correspondantes de la courbe soient effectivement explorées, et tout ce que l'on peut dire est qu'elles ont plus de chances de l'être en régime chaotique.

Ceci est un résultat nouveau simple, de même que celui qui concerne la condition pour que le débit puisse être négatif. Deux cas existent :

- $\lambda < 1/[1 + 2A(\zeta)]$. Les pertes ne sont pas très faibles. Le débit ne peut jamais être négatif, on peut montrer que c'est le cas le plus courant ;
- $\lambda > 1/[1 + 2A(\zeta)]$. Il existe pour γ une limite inférieure, très légèrement inférieure à celle donnée par (4), et une limite supérieure, entre lesquelles le débit peut être négatif. Là encore, les conditions pour que le débit soit négatif sont encore plus restrictives pour un régime à deux états.

Notons que la fonction $f(x)$ a une discontinuité de dérivée première en M_b . Notons enfin que la fonction $f(x)$ n'a en général pas les propriétés des fonctions les plus étudiées par les mathématiciens (cf par exemple [11]), ce que nous avons détaillé dans [13].

4 Emploi des itérées pour l'analyse des régimes d'oscillations

Nous commençons par rappeler quelques propriétés des fonctions itérées, notées $f^{(n)}(x) = f[f^{(n-1)}(x)]$. Si x^* est un point fixe de $f(x)$, c.-à-d. si $f(x^*) = x^*$, il est aussi point fixe de toutes les itérées. Ainsi sur la figure 6, l'itérée d'ordre 1 a un point fixe, et les itérées d'ordre 2 et 4 en ont trois.

Le régime correspondant à un point fixe est stable si la dérivée de $f(x)$ en ce point est en valeur absolue inférieure à l'unité. La figure 6 montre ainsi le point fixe 0 de l'itérée d'ordre 1 : le régime correspondant est le régime statique (à un seul état), et pour la valeur de γ choisie, il est instable parce que la tangente à la courbe n'est pas située entre les deux diagonales tracées en ce point. En revanche les points 1 et 2, qui sont les points fixes de l'itérée d'ordre 2, donnent lieu à un régime stable à deux états, puisque les tangentes sont bien situées par rapport aux diagonales. Toujours sur la même figure, on voit que l'itérée d'ordre 4 ne coupe pas la diagonale en d'autres points que celles d'ordre 1 et 2, et donc il ne peut exister de régimes à 4 états, stables ou non.

D'autres propriétés sont aisées à démontrer : ainsi toutes les itérées passent par le point $(x, f(x))$, situé sur la droite horizontale passant par x^* . Les extremums de l'itérée d'ordre 2 sont soit à la même abscisse, soit à la même ordonnée que ceux de l'itérée d'ordre 1.

Le coin au point M_b (discontinuité de la dérivée) est également visible sur les itérées.

La figure 7 montre pour les mêmes valeurs des paramètres les itérées d'ordre 8 et 16. Pour une valeur de x donnée, donc pour une condition initiale donnée, on peut voir la convergence vers le régime périodique à 2 états quand le nombre d'itérations augmente. Comme nous n'avons choisi que des valeurs paires des ordres d'itérées, on ne voit pas l'alternance entre les points 1 et 2. Mais ceci permet de voir la rapidité de convergence, indépendamment de la condition initiale.

Pour terminer, nous analysons une situation plus complexe, celle de régimes chaotiques ou proches du chaos. La figure 8 nous montre, pour les valeurs des paramètres de la figure 3, que l'itérée d'ordre 12, pour l'exemple choisi, présente beaucoup plus d'oscillations que l'itérée d'ordre 6, ce qu'on peut mettre en relation avec le caractère chaotique du régime. Cependant l'analyse doit être très fine, car de tous petits changements peuvent aboutir à d'autres types de régime. Ainsi on remarque que l'itérée d'ordre 6 est presque tangente à la première diagonale en 6 points. En revanche quand cette itérée traverse la diagonale, elle la coupe donc en 12 points, et la moitié de ces points est nécessairement stable, ce qui explique le régime (stable) à 6 états. Le cas intermédiaire est le suivant : quand l'itérée d'ordre 6 est parfaitement tangente, on a un régime d'intermittences entre le régime chaotique, et le régime à 6 états. Il va de soi que l'observation expérimentale de ce type de transition est difficile, les régimes de ce genre n'existant que sur une très faible plage de paramètres. Pour un instrumentiste, c'est chose quasiment impossible, mais une expérience courante est que en choisissant des doigtés de fourches, donc un résonateur plus complexe que celui étudié dans cette communication, on peut obtenir une très grande variété de régimes, y compris des régimes à modulation de fréquence, en changeant progressivement le paramètre d'excitation. Un schéma de bifurcation complexe est donc une expérience courante ressentie par les instrumentistes [14].

5 Conclusion

Les cartes itérées permettent à la fois une interprétation des transitions de régimes, et un calcul simple de leur stabilité. Et l'étude de la fonction elle-même, ou itérée d'ordre 1, peut être très instructive pour analyser le comportement de modèle, comme ici le modèle de caractéristique non linéaire.

Remerciements

Ce travail a été réalisé dans le cadre du projet ANR CONSONNES. Nous remercions aussi Christophe Vergez pour ses remarques très utiles.

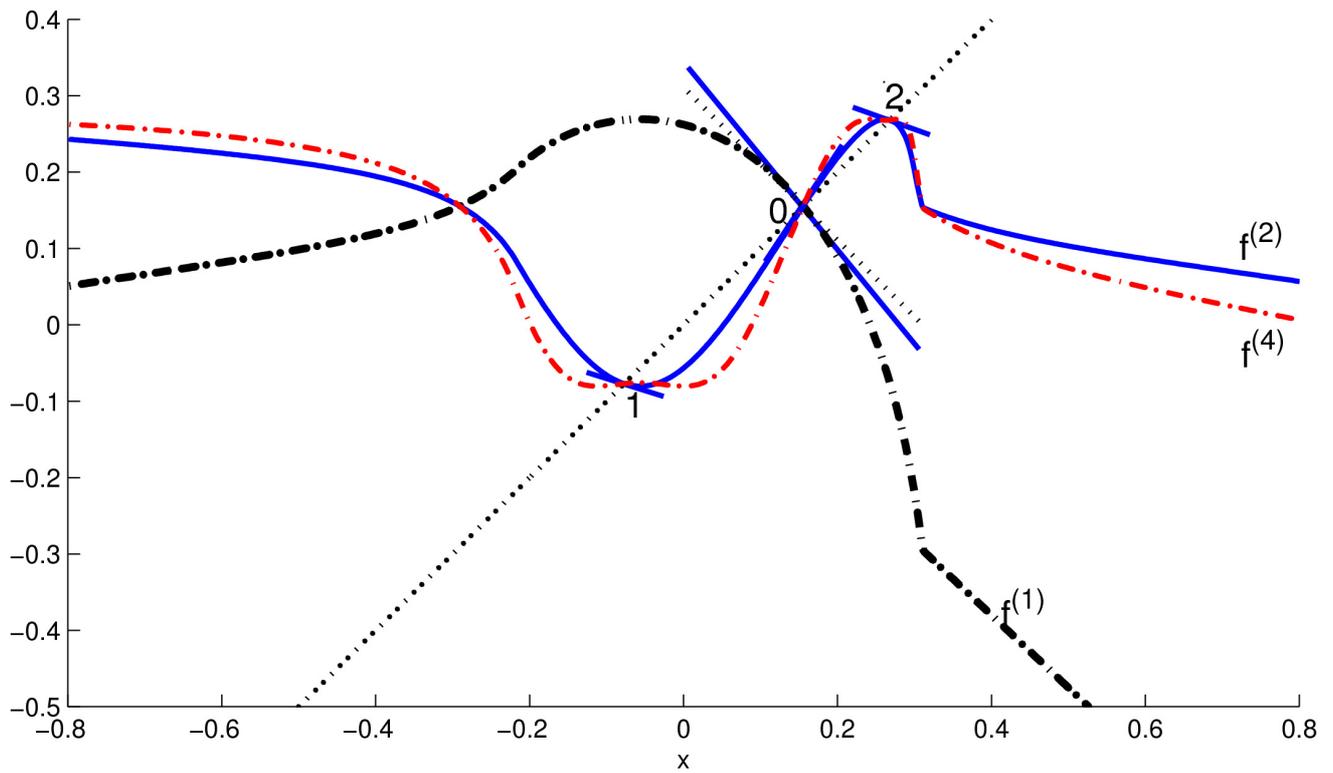


FIG. 6: Itérées d'ordre 1, 2 et 4 pour des valeurs des paramètres correspondant à un régime à 2 points (1 et 2) stable, et un régime à 1 point (0) instable. $\gamma = 0.41$, $\zeta = 0.8$, $\lambda = 0.95$. Les points fixes des fonctions sont par définition sur la première diagonale. On a fait figurer les tangentes aux points fixes, ainsi que la deuxième diagonale au point 0.

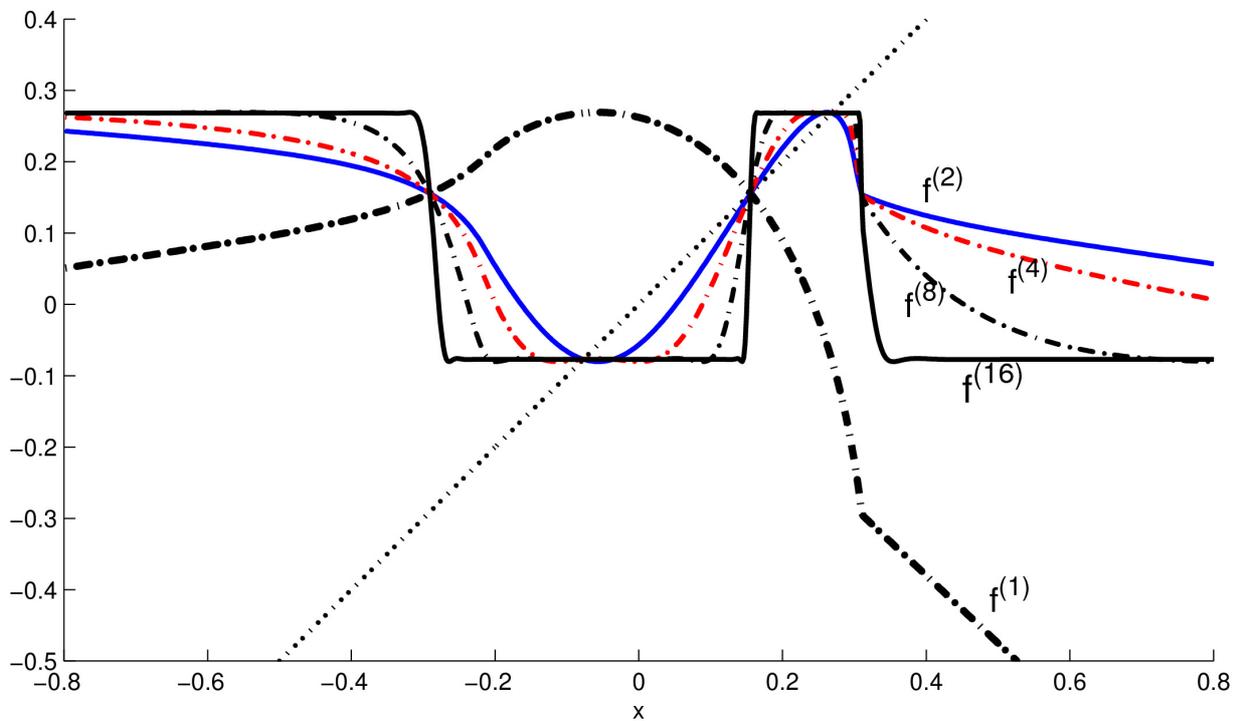


FIG. 7: Figure identique à la figure 6, avec en outre les itérées d'ordre 8 et 16. La convergence vers le régime à deux états est très rapide, quelle que soit la condition initiale (abscisse x).

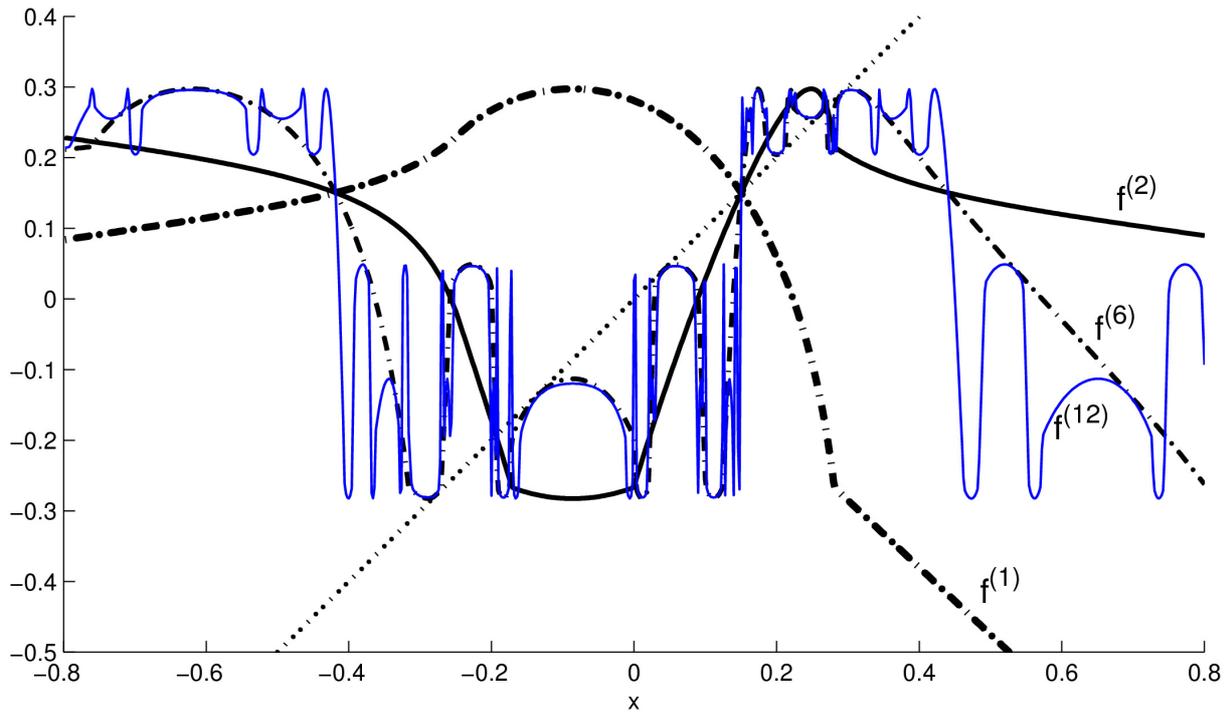


FIG. 8: Itérées d'ordre 1, 2, 6 et 12 pour les paramètres de la figure 3. La fonction d'ordre 12 présente un grand nombre d'oscillations, qui peuvent expliquer la nature chaotique, c.-à-d. la très forte dépendance des conditions initiales du résultat.

Références

- [1] McIntyre, M. E., Schumacher, R. T., and Woodhouse, J. . On the oscillations of musical instruments. *J. Acoust. Soc. Am.*, 74, 1983, 1325–1345.
- [2] Maganza, C., Caussé, R. and Laloë, F. . “Bifurcations, period doubling and chaos in clarinetlike systems”, *Europhysics letters* 1, 1986, 295–302.
- [3] Kergomard, J., “Elementary considerations on reed-instrument oscillations”. In *Mechanics of musical instruments*, vol. **335** (A. Hirschberg/ J. Kergomard/ G. Weinreich, eds), of *CISM Courses and Lectures*, pages 229–290. Springer-Verlag, Wien, 1995.
- [4] Kergomard, J., Dalmont, J.P., Gilbert, J. and Guillemain, Ph. . “Period doubling on cylindrical reed instruments”. In *Proceedings of the Joint congress CFA/DAGA'04*, pages 113–114, Strasbourg, 22th 25th March 2004.
- [5] Ollivier, S., Kergomard, J. and Dalmont, J.-P. “Idealized models of reed woodwinds. Part II : On the Stability of ”Two-Step” Oscillations”. *Acta Acustica united with Acustica*, 91, 2005, 166–179.
- [6] Dalmont, J.-P., Gilbert, J., Kergomard, J. and Ollivier, S. “An analytical prediction of the oscillation and extinction thresholds of a clarinet”. *J. Acoust. Soc. Am.*, 118, 2005, 3294–3305.
- [7] Hirschberg, A., Van de Laar, R. W. A., Marrou-Mauries, J. P., Wijnands, A. P. J., Dane, H. J., Kruijswijk, S. G. and Houtsma, A. J. M. “A Quasi-stationary Model of Air Flow in the Reed Channel of Single-reed Woodwind Instruments”. *Acustica*, 70, 1990, 146–154.
- [8] Dalmont, J.-P. and Frappé, C., “Oscillation and extinction thresholds of the clarinet : Comparison of analytical results and experiments”. *J. Acoust. Soc. Am.*, 122, 2007, 1173–1179.
- [9] May, R. M., “Simple mathematical models with very complicated dynamics”, *Nature* 261, 1976, 459-67.
- [10] Bergé, P., Pomeau, Y. and Vidal, C., *L'ordre dans le chaos*, Hermann, Paris, 1984.
- [11] Collet, P. and Eckmann, J.P., “Properties of Continuous Maps of the Interval to Itself”, *Mathematical Problems in Theoretical Physics*, K. Osterwalder (ed.), Springer-Verlag, Heidelberg, 1979; *Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems*, Birkhäuser, Basel, 1980.
- [12] Gibiat, V. and Castellengo, M. . “Period doubling occurrences in wind instrument musical performances”, *Acustica united with acta acustica*, 86, 2000, 746–754.
- [13] Taillard, P.A., Kergomard, J., Laloë, F., “Iterated maps for clarinet-like systems”, *Nonlinear Dynamics*, 2009 (soumis).
- [14] Kergomard, J., “Instruments de musique à vent ; comment éviter le chaos pour faire de la musique ?”, *Acoustique et Techniques*, 9, 1997, 15-22.