Fachhochschule Nordwestschweiz
Hochschule für Wirtschaft

Das Sammlerproblem

Von Händlern und Sammlern: Paninibildchen

Studie

Autor: Helmut Vetter
Ort, Datum: Arlesheim, 03.09.2014

Diese Arbeit wurde mit TexLive erstellt.

Das Sammlerproblem
Von Händlern und Sammlern: Paninibildchen

Autor
Vetter, Helmut
Schillerweg 2
CH-4144 Arlesheim
061 599 51 09
helmut.vetter@fhnw.ch

Auftraggeberschaft
Fachhochschule für Wirtschaft
Tanner, Christian

Arlesheim, September 2014

Ehrenwörtliche Erklärung
Ich versichere, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne Benutzung anderer als der im Literaturverzeichnis angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Die wörtlich oder inhaltlich den im Literaturverzeichnis aufgeführten Quellen und Hilfsmitteln entnommenen Stellen sind in der Arbeit als Zitat bzw. Paraphrase kenntlich gemacht.

Diese Arbeit ist noch nicht veröffentlicht worden. Sie ist somit weder anderen Interessenten zugänglich gemacht noch einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt worden.

Arlesheim, 03.09.2014

Helmut Vetter

Helmut Vetter

Management Summary

Es ist ein Phänomen, dass die Menschen bereit sind ein Überraschungspaket enthaltend fünf zufällige Bildchen zu kaufen, um nach und nach die hundert Bilder eines Albums zusammenzubekommen. Die Berechnungen dieses Artikels zeigen, dass hierfür im Erwartungswert rund 102 Päckchen gekauft werden müssen. Also 510 Bilder, wovon 410 überflüssig sind!

Folgendes scheinen mir die Gründe, wieso dieses Geschäftsmodell funktioniert
1) die Sammelleidenschaft der Menschen,
2) der soziale Umgang durch das Tauschen von Bildern
3) ein höheres "soziales" Ansehen für die "Wohlhabenden"
4) der günstige Preis des Einzelpakets und die naive Schätzung 100/5 mal Einzelpreis = Gesamtpreis, welche in diesem Artikel unter anderem wiederlegt werden soll.

Ich gehe in drei Richtungen über die übliche Betrachtung in Lehrbüchern (Erwartungswert für den Einzelsammler) hinaus:
1) Berechnung der Wahrscheinlichkeitsverteilung für Einzelsammler und Einzelbilder.
2) Kennzahlen für eine Sammlergemeinschaft und Einzelbilder.
3) Kennzahlen für Einzelsammler und Bildersets.

Inhaltsverzeichnis

1 Problemstellung

1 Ein Sammler möchte ein komplettes Album bestehend aus $s = 100$ Bildern durch den Kauf einzelner, blind gekaufter Bilder zusammenstellen.

2 Voraussetzung: Alle s Bilder haben bei jedem Kauf die gleiche Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{s}$.

3 Wieviele Bilder muss er kaufen? Präziser: Wie gross sind Erwartungswert und Varianz für die Anzahl zu kaufender Bilder bis zum kompletten Album? Darstellung der klassische Methode via Zufallsvariabeln. Zudem gebe ich die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Anzahl zu kaufender Bilder an. → Kapitel 2

4 Wie sieht es aus, wenn $p = 3$ Sammler zusammen arbeiten und p komplette Alben zusammenstellen wollen? Ich verallgemeinere hier die bekannte rekursive Berechnung für den Erwartungswert im Fall $p = 1$, auf Erwartungswert und Varianz für die Fälle $p \geq 1$. Vorsicht, das wird ziemlich kompliziert!

5 Wieviel Geld können sie sparen? Präziser: Wie gross sind Erwartungswert und Varianz für die Anzahl zu kaufender Bilder bis zu p kompletten Alben? Die Übereinstimmung der Resultate der beiden Methoden im Fall $p = 1$ aus Kapitel 2 und 4 dient als Bestätigung der rekursiven Methode. → Kapitel 3, 4 und 5

6 Weniger komplex ist der Ausbau des Problems für eine Person für den Fall, dass man nicht einzelne Bilder kauft, sondern jeweils Sets von $t = 5$ Bildern.

7 Voraussetzung: Ein Set enthält stets t verschiedene Bilder. Ansonsten haben aber alle $\binom{s}{t}$ Kombinationen gleiche Wahrscheinlichkeit.

8 Dieses Problem ist ein gutes Beispiel wie sich lokale Rechnungen zur Lösung eines globalen Problems zusammensetzen lassen.

9 Im Gegensatz zum Problem für mehrere Sammler scheint mir die Lösung dieses Problems nicht zu schwierig und doch lehrreich für unsere Studenten. → Kapitel 6.

10 Für den Erwartungswert der Anzahl zu kaufender Sets findet sich in Wikipedia (Dezember 2013) eine Formel, die nicht mit meinen Resultaten übereinstimmt. → Kapitel 6.

11 Kapitel 7 ist ein analytischer Anhang, in dem ich Formeln, die in Kapitel 2 benötigt werden, beweise.

2 Der Fall $p = 1$

12 Die Zufallsvariable X_i ($i = 1 \ldots s$) bezeichne die Anzahl benötigter Bilderkäufe um das i-te Bild zu erlangen, d.h. vom Set mit $i - 1$ verschiedenen Bildern zum Set mit i verschiedenen Bildern zu gelangen.

13 Die X_i sind geometrisch verteilt mit einer Trefferwahrscheinlichkeit für ein neues Bild (das i-te Bild) von $p = 1 - \frac{i-1}{s} = \frac{s-i+1}{s}$.

14 <u>Wahrscheinlichkeitsverteilung</u> für X_i:

$$P(X_i = x) = (1-p)^{x-1} \cdot p = (\frac{i-1}{s})^{x-1} \cdot \frac{s-1+1}{s} = \frac{(i-1)^{x-1} \cdot (s-i+1)}{s^x}$$

15 <u>Erwartungswert</u> für X_i:

$$E(X_i) = \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot (1-p)^{x-1} \cdot p = p \cdot \frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p} = \frac{s}{s-i+1}$$

16 Varianz für X_i:

$$E(X_i^2) = \sum_{x=1}^{\infty} x^2 \cdot (1-p)^{x-1} \cdot p = p \cdot \frac{1+(1-p)}{(1-(1-p))^3} = \frac{p \cdot (2-p)}{p^3} = \frac{2-p}{p^2}$$

$$V(X_i) = E(X_i^2) - E^2(X_i) = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2} = \frac{1-\dfrac{s-i+1}{s}}{(\dfrac{s-i+1}{s})^2} = \frac{(i-1)\cdot s}{(s-i+1)^2}$$

17 Die Herleitung der Summenformeln für $\sum\limits_{x=1}^{\infty} x \cdot q^{x-1}$ und $\sum\limits_{x=1}^{\infty} x^2 \cdot q^{x-1}$ finden sich im Anhang.

18 Gesamthaft Anzahl nötige Käufe X

Die Zufallsvariable $X := \sum\limits_{i=1}^{s} X_i$ gibt die Anzahl total gekaufter Bilder vom leeren Album bis zum vollen Set von s Bildern.

19 Die X_i sind unabhängig: $P(X_i = x | X_1 = x_1 \wedge X_2 = x_2 \wedge X_{i-1} = x_{i-1}) = \dfrac{(i-1)^{x-1} \cdot (s-i+1)}{s^x} = P(X_i = x)$

20 Erwartungswert von X

$$E(X) = \sum_{i=1}^{s} E(X_i) = \sum_{i=1}^{s} \frac{s}{s-i+1} = s \cdot \sum_{j=1}^{s} \frac{1}{j}$$ - via Substitution $j = s-i+1$

21 Varianz von X

$$V(X) = \sum_{i=1}^{s} V(X_i) = \sum_{i=1}^{s} \frac{(i-1)\cdot s}{(s-i+1)^2} = s \cdot \sum_{j=1}^{s} \frac{s-j}{j^2} = s^2 \cdot \sum_{j=1}^{s} \frac{1}{j^2} - s \cdot \sum_{j=1}^{s} \frac{1}{j}$$ - via Substitution $j = s-i+1$

22 Beispiel: Im Fall $s = 10$ ergibt sich:
Erwartungswert $E(X) = 29.29$
Varianz $V(X) = 125.69$
Standardabweichung $S(X) = \sqrt{V(X)} = 11.21$

23 Beispiel: Im Fall $s = 100$ ergibt sich:
Erwartungswert $E(X) = 518.74$
Varianz $V(X) = 15831.10$
Standardabweichung $S(X) = \sqrt{V(X)} = 125.82$

24 Der Variationskoeffizient ist mit $\dfrac{S(X)}{E(X)} = \dfrac{125.82}{518.74} = 24.3\%$ klein.
Der Erwartungswert ist also ein recht scharfer Richtwert für die Anzahl effektiv zu kaufender Bilder.

25 Der Erwartungswert $E(X)$ lässt sich sehr gut durch $s \cdot (\dfrac{\ln(s) + \ln(s+1)}{2} + \gamma)$, mit $\gamma = 0.5772$ approximieren.
So ergibt sich für $s = 100$: $E(X) \approx 100 \cdot (\dfrac{\ln(100) + \ln(101)}{2} + \gamma) = 518.73$ als sehr gute Näherung für den exakten Wert 518.74.
Die Herleitung der Formel findet sich als Satz 4 im Anhang.

26 Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X erhält man wie folgt:

27 $P(X = k) = \dfrac{|E_k|}{|\Omega_k|}$
Dabei ist $\Omega_k := \{(\omega_1, \ldots, \omega_k) \mid (\omega_i \in \mathbb{N}_s$ für $i = 1 \ldots k)\}$ mit $\mathbb{N}_s := \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq s\}$
E_k enthält die Elemente von Ω_k mit "die ω_i für $i = 1 \ldots k-1$ treffen alle Elemente von $\mathbb{N}_s$ bis auf eines und ω_k ist dann gleich diesem einen".

28 Klarerweise gilt $\Omega_k = s^k$

29 Für das Auszählen von E_k beachte man, dass $|E_k| = s \cdot |F_k|$, wo $F_k := \{(\omega_1, \ldots, \omega_k) \in E_k \mid (\omega_k = s)\}$

30 Die Projektion $p : \mathbb{N}_s^k \to \mathbb{N}_s^{k-1}$ via $(x_1, \ldots, x_k) \mapsto (x_1, \ldots x_{k-1})$ bildet F_k eineindeutig auf die Teilmenge $G_{k-1} \subseteq N_{s-1}^{k-1}$ ab, deren Elemente $(\omega_1, \ldots, \omega_{k-1})$ jedes Element aus $\mathbb{N}_{s-1}$ mindestens einmal enthalten.

31 Es gilt $G_{k-1} = \mathbb{N}_{s-1}^{k-1} \backslash (A_1 \cup \ldots \cup A_{s-1})$, wo $A_i := \{(\omega_1, \ldots, \omega_{k-1}) \in \mathbb{N}_{s-1}^{k-1} \mid (\omega_1, \ldots, \omega_{k-1}) \text{ enthält } i \text{ nicht}\}$ für $i \in \mathbb{N}_{s-1}$

32 Nach Inklusions-Exklusions-Formel ergibt sich jetzt leicht:

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_{s-1}| = \sum_{i=1}^{s-1} (-1)^{i-1} \binom{s-1}{i} \cdot (s-1-i)^{k-1}$$

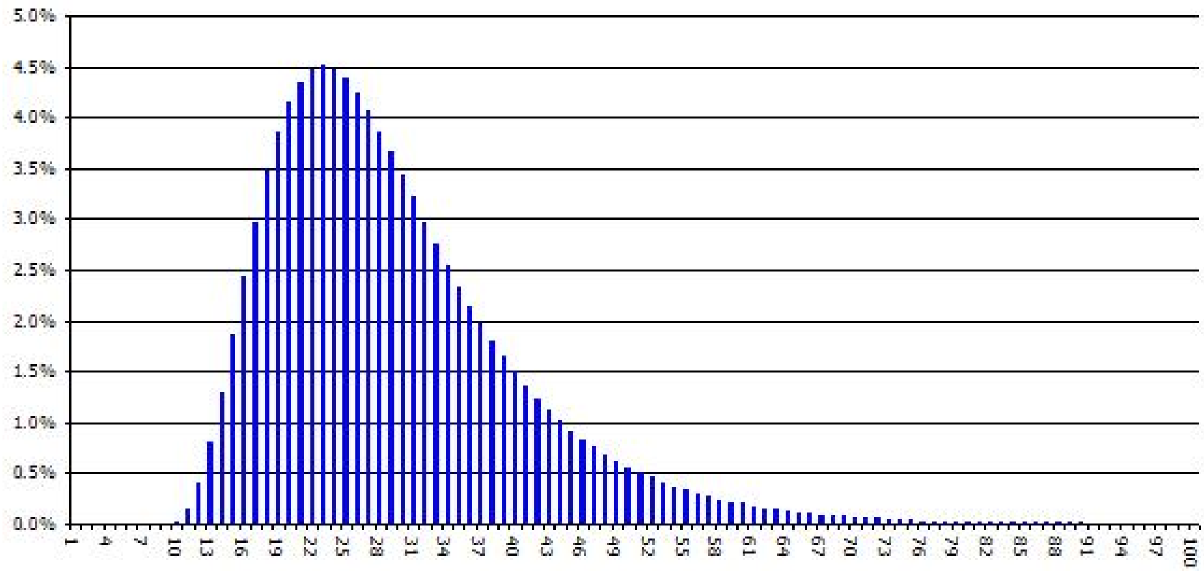
und folglich: $|G_{k-1}| = |\mathbb{N}_{s-1}^{k-1}| - |A_1 \cup \ldots \cup A_{s-1}| = (s-1)^{k-1} - \sum_{i=1}^{s-1} (-1)^{i-1} \binom{s-1}{i} \cdot (s-1-i)^{k-1} =$

$$= \sum_{i=0}^{s-1} (-1)^{i} \binom{s-1}{i} \cdot (s-1-i)^{k-1}$$

und schliesslich: $|E_k| = s \cdot |F_k| = s \cdot |G_{k-1}| = s \cdot \sum_{i=0}^{s-1} (-1)^{i} \binom{s-1}{i} \cdot (s-1-i)^{k-1}$

33 Satz: $P(X = k) = \dfrac{\sum_{i=0}^{s-1} (-1)^{i} \binom{s-1}{i} \cdot (s-1-i)^{k-1}}{s^{k-1}}$

34 Für $s = 10$ ergibt dies folgendes Histogramm. Kontrolle $E(X) = 29.29$, $V(X) = 125.69$. In Übereinstimmung mit Punkt 22.



35 Definiert man die k-te Halbwertszeit für $k \geq 1$, als die Differenz des Quantils $1 - 2^{-k}$ und des Quantils $1 - 2^{-(k-1)}$, so ergeben sich am Beispiel 34 nahezu konstante Halbszeiten für $k \geq 2$.

Quantile $1 - 2^{-k}$

k	x	$P(X \leq x)$
1	27	$1 - 2^{-1.06}$
2	35	$1 - 2^{-2.10}$
3	42	$1 - 2^{-3.11}$
4	49	$1 - 2^{-4.15}$
5	55	$1 - 2^{-5.05}$

k	x	$P(X \leq x)$
6	62	$1 - 2^{-6.11}$
7	68	$1 - 2^{-7.02}$
8	75	$1 - 2^{-8.08}$
9	82	$1 - 2^{-9.14}$
10	88	$1 - 2^{-10.05}$

k	x	$P(X \leq x)$
11	95	$1 - 2^{-11.12}$
12	101	$1 - 2^{-12.03}$
13	108	$1 - 2^{-13.09}$
14	114	$1 - 2^{-14.01}$
15	121	$1 - 2^{-15.07}$

k	x	$P(X \leq x)$
16	128	$1 - 2^{-16.13}$
17	134	$1 - 2^{-17.05}$
18	141	$1 - 2^{-18.11}$
19	147	$1 - 2^{-19.02}$
20	154	$1 - 2^{-20.09}$

36 Abgesehen von der verlängerten Startphase, zeigt die Verteilung also angenähert das typische Verhalten einer geometrischverteilten Zufallsvariable $X \sim$ Geo(p) [Verteilungsfunktion $F_X(x) := P(X \leq x) = 1-(1-p)^x$] bzw. einer exponentialverteilten Zufallsvariable $X \sim$ Exp(λ) [Verteilungsfunktion: $F_X(x) := P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$]

37 Die Trefferwahrscheinlichkeit für das letzte (im Beispiel das 10.) Bild beträgt $p = \frac{1}{s} = 0.1$. Bezeichne X_s wie vorher die Wartezeit von einem Bestand von $s-1$ Bildern bis zum letzten Bild. X_s ist Geometrisch verteilt, hat also für $k \in \mathbb{N}$ die Verteilungsfunktion $F_{Xs}(k) = 1-(1-p)^k$. Daraus ergibt sich eine konstante Halbwertszeit T aus $1-(1-p)^{nT} = 1-2^{-n}$, nämlich $T = -\frac{\ln(2)}{\ln(1-p)} \approx \frac{0.7}{p}$ in unserm Beispiel mit $p = 0.1$ also $T \approx 7$. Dies passt recht gut den den "Halbwertszeiten" in Punkt 35. Diese werden also massgeblich durch die Wartezeit auf das letzte Bild bestimmt.

3 Der Fall $p > 1$

38 Bezeichne $\vec{i} = (i_1, \ldots, i_p)$ den Zustand: Die Sammlung umfasst i_1 einfache, i_2 doppelte, $\ldots i_p$ (mindestens) p-fache Bilder.

39 Die Zufallsvariable $Y(\vec{i}) = Y(i_1, \ldots, i_p)$ bezeichne die Anzahl der verbleibender Bilderkäufe um aus dem Zustand $\vec{i}$ die Komplettierung der p Sets - also Zustand $(0, \ldots, 0, s)$ - zu erreichen.

40 Problemstellung in dieser Notation: Gesucht sind $E(Y(\vec{0}))$ und $V(Y(\vec{0}))$, der Erwartungswert bzw. die Varianz der Anzahl Käufe vom Start der Sammlung (Zustand $\vec{0}$) bis zum Set von p kompletten Alben.

41 Die (zulässigen) Zustände $\vec{i} \in \mathbb{N}_0^p$ erfüllen die Bedingung: $|\vec{i}| := \sum_{k=1}^{p} i_k \leq s$.

42 Alle $\vec{i}$ mit $|\vec{i}| = q$ für $0 \leq q \leq s$ werden zusammengefasst im "Layer" q. Siehe Grafik unter Punkt 57.

43 Es gibt total $\binom{q+p-1}{p-1}$ Zustände im Layer q und total $\sum_{q=0}^{s} \binom{q+p-1}{p-1} = \binom{s+p}{p}$ Zustände in allen $s+1$ Layern zusammen.

44 Bezeichne $\vec{e}_k$ den k-ten Einheitsvektor, bestehend aus lauter Nullen und an der Stelle k einem Einser.

45 Definiere die Zufallsvariable W: Der Wert von W gibt an, wie oft ein neu gekauftes Bild bereits vorhanden war, und ist gleich p falls das neu gekaufte Bild bereits p-fach oder öfter vorhanden war.

46 Der Wertebereich von W ist $\{0, 1, 2, \ldots p\}$.

47 Verteilung von W und bedingte Erwartungswerte:

w	$P(W = w)$	$E[Y(\vec{i})\|W = w]$	$V[Y(\vec{i})\|W = w]$
$w = 0$	$\frac{s-\|\vec{i}\|}{s}$	$1 + E[Y(\vec{i} + \vec{e}_1)]^*$	$V[Y(\vec{i} + \vec{e}_1)]^*$
$1 \leq w \leq p-1$	$\frac{i_w}{s}$	$1 + E[Y(\vec{i} - \vec{e}_w + \vec{e}_{w+1})]^{**}$	$V[Y(\vec{i} - \vec{e}_w + \vec{e}_{w+1})]^{**}$
$w = p^{***}$	$\frac{i_p}{s}$	$1 + E[Y(\vec{i})]$	$V[Y(\vec{i})]$

* nur möglich, falls $|\vec{i}| < s$, sonst wird der Wert gemäss folgender Konvention gewählt.
** nur möglich, falls $i_w > 0$, sonst wird der Wert gemäss folgender Konvention gewählt.
*** nur möglich, falls $i_p < s$

Konvention: Die unmöglichen Fälle * und ** sind wegen $P(W = w) = 0$ ohne Einfluss auf die Berechnung. Um die kommenden Formeln nicht noch mit Fallunterscheidungen zu komplizieren, sei definiert $E[Y(\vec{j})] = V[Y(\vec{j})] = 0$, falls $\vec{j}$ kein zulässiger Zustand ist.

48 Die beiden Formeln $\boxed{1}$ und $\boxed{2}$ liefern im folgenden Rekursionen zur Berechnung von $E[Y(\vec{i})]$ und $V[Y(\vec{i})]$.

$\boxed{1}$ Erwartungswert

$E(X) = E[E(X|K)]$

$\boxed{2}$ Varianz

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E^2(X) = E[E(X^2|K)] - E^2[X] = \{E[V(X|K) + E^2(X|K)]\} - E^2[X] \\ &= E[V(X|K)] + E[E^2(X|K)] - E^2[X] \end{aligned}$$

49 $\boxed{1}$ Erwartungswert

- Falls $i_p = s$:

$E[Y(\vec{i})] = 0$ – "alle p Alben bereits komplett!"

- Sonst:

$$\begin{aligned} E[Y(\vec{i})] &= E[E(Y(\vec{i})|W)] = \sum_{w=0}^{p} P(W=w) \cdot E[Y(\vec{i})|W=w)] = \\ &= \frac{s-|\vec{i}|}{s} \cdot (1 + E[Y(\vec{i}+\vec{e}_1)]) + \sum_{w=1}^{p-1} \frac{i_w}{s} \cdot (1 + E[Y(\vec{i}-\vec{e}_w+\vec{e}_{w+1})]) + \frac{i_p}{s} \cdot (1 + E[Y(\vec{i})]) \\ &= 1 + \frac{s-|\vec{i}|}{s} \cdot E[Y(\vec{i}+\vec{e}_1)] + \sum_{w=1}^{p-1} \frac{i_w}{s} \cdot E[Y(\vec{i}-\vec{e}_w+\vec{e}_{w+1})] + \frac{i_p}{s} \cdot E[Y(\vec{i})] \end{aligned}$$

50 Der "Sonst"-Fall lässt sich nach $E[Y(\vec{i})]$ auflösen:

- Falls $i_p = s$:

$E[Y(\vec{i})] = 0$ – "alle p Alben bereits komplett!"

- Sonst:

$$\begin{aligned} E[Y(\vec{i})] &= \frac{s}{s-i_p} \cdot \{1 + \frac{s-|\vec{i}|}{s} \cdot E[Y(\vec{i}+\vec{e}_1)] + \sum_{w=1}^{p-1} \frac{i_w}{s} \cdot E[Y(\vec{i}-\vec{e}_w+\vec{e}_{w+1})]\} = \\ &= \frac{s + (s-|\vec{i}|) \cdot E[Y(\vec{i}+\vec{e}_1)] + \sum_{w=1}^{p-1} i_w \cdot E[Y(\vec{i}-\vec{e}_w+\vec{e}_{w+1})]}{s-i_p} \end{aligned}$$

51 $\boxed{2}$ Varianz

- Falls $i_p = s$:

$V[Y(\vec{i})] = 0$ – "alle p Alben bereits komplett!"

- Sonst:

$$\begin{aligned} V[Y(\vec{i})] &= E[V(Y(\vec{i})|W)] + E[E^2(Y(\vec{i})|W)] - E^2[Y(\vec{i})] = \\ &= \sum_{w=0}^{p} P(W=w) \cdot V[Y(\vec{i})|W=w)] + \sum_{w=0}^{p} P(W=w) \cdot E^2[Y(\vec{i})|W=w)] - E^2[Y(\vec{i})] = \\ &= \frac{s-|\vec{i}|}{s} \cdot V[Y(\vec{i}+\vec{e}_1)] + \sum_{w=1}^{p-1} \frac{i_w}{s} \cdot V[Y(\vec{i}-\vec{e}_w+\vec{e}_{w+1})] + \frac{i_p}{s} \cdot V[Y(\vec{i})] + \\ &\quad + \frac{s-|\vec{i}|}{s} \cdot (1+E[Y(\vec{i}+\vec{e}_1)])^2 + \sum_{w=1}^{p-1} \frac{i_w}{s} \cdot (1+E[Y(\vec{i}-\vec{e}_w+\vec{e}_{w+1})])^2 + \frac{i_p}{s} \cdot (1+E[Y(\vec{i})])^2 - E^2[Y(\vec{i})] \end{aligned}$$

52 Der "Sonst"-Fall lässt sich nach $V[Y(\vec{i})]$ auflösen:

- Falls $i_p = s$:
$V[Y(\vec{i})] = 0$ – "alle p Alben bereits komplett!"
- Sonst:

$$V[Y(\vec{i})] = \frac{s}{s-i_p} \cdot \{ \frac{s-|\vec{i}|}{s} \cdot V[Y(\vec{i}+\vec{e}_1)] + \sum_{w=1}^{p-1} \frac{i_w}{s} \cdot V[Y(\vec{i}-\vec{e}_w+\vec{e}_{w+1})] +$$

$$+ \frac{s-|\vec{i}|}{s} \cdot (1+E[Y(\vec{i}+\vec{e}_1)])^2 + \sum_{w=1}^{p-1} \frac{i_w}{s} \cdot (1+E[Y(\vec{i}-\vec{e}_w+\vec{e}_{w+1})])^2 + \frac{i_p}{s} \cdot (1+E[Y(\vec{i})])^2 - E^2[Y(\vec{i})]\} =$$

$$= \frac{(s-|\vec{i}|) \cdot V[Y(\vec{i}+\vec{e}_1)] + \sum_{w=1}^{p-1} i_w \cdot V[Y(\vec{i}-\vec{e}_w+\vec{e}_{w+1})]}{s-i_p} +$$

$$+ \frac{(s-|\vec{i}|) \cdot (1+E[Y(\vec{i}+\vec{e}_1)])^2 + \sum_{w=1}^{p-1} i_w \cdot (1+E[Y(\vec{i}-\vec{e}_w+\vec{e}_{w+1})])^2 + i_p \cdot (1+E[Y(\vec{i})])^2 - s \cdot E^2[Y(\vec{i})}{s-i_p}$$

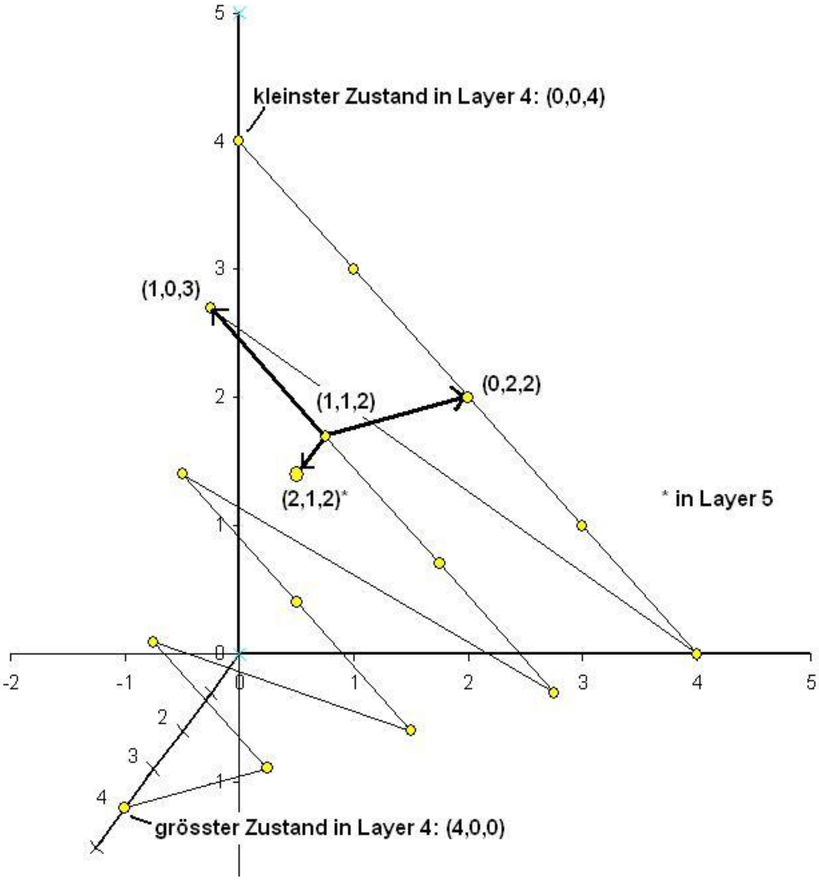
53 Ordnet man die Zustände wie folgt an ("layerweise absteigend von s bis 0 und im Layer alphabetisch aufsteigend"), siehe Grafik unter Punkt 57:
$\vec{i} \prec \vec{j} :\Leftrightarrow (|\vec{i}| > |\vec{j}|) \vee [(|\vec{i}| = |\vec{j}|) \wedge (\vee_{k=1}^{p} (\wedge_{l=1}^{k-1} (i_l = j_l) \wedge (i_k < j_k)))]$.

54 Die Rekursion greift jeweils nur auf kleinere Zustände zurück und führt somit den gewünschten Zielzustand $(0, 0, \ldots 0)$ zurück auf den kleinsten Zustand $(0, 0, \ldots, 0, s)$, für den per Definition $E[Y(\vec{i})] = V[Y(\vec{i})] = 0$ gilt.

55 Das Verfahren wird im folgenden Abschnitt mit einem Visualbasicprogramm umgesetzt. Gerechnet wird für den Fall $s = 100$ und $p = 3$.

56 Die Resultate aus Abschnitt 2 ($p = 1$) erhält man dann als Zwischenlösung: $E[Y(0, s, 0)] = 518.74$ und $V[Y(0, s, 0)] = 15831.10$.

57 Grafik für $p = 3$, Layer $q = 4$: $x_1 + x_2 + x_3 = 4$
Der Zustand (1,1,2) wird zurückgeführt auf die kleinern Zustände (2,1,2), (0,2,2), (1,0,3).



4 Berechnung für den Fall $s = 100$ und $p = 3$

58 Hauptprogramm:

```
Public Const s = 100
Dim aE3(s, s, s) As Double, aV3(s, s, s) As Double

Sub ErzeugeEV3() 'Fall p=3
Dim q As Integer, x1 As Integer, x2 As Integer, x3 As Integer

  For q = s To 0 Step −1
    For x1 = 0 To q
      For x2 = 0 To q − x1
        x3 = q − x1 − x2
        If x3 = s Then
          aE3(x1, x2, x3) = 0
          aV3(x1, x2, x3) = 0
        Else
          aE3(x1, x2, x3) = (s + (s − x1 − x2 − x3) * fE3(x1 + 1, x2, x3)
            + x1 * fE3(x1 − 1, x2 + 1, x3)
            + x2 * fE3(x1, x2 − 1, x3 + 1)) / (s − x3)
          aV3(x1, x2, x3) = ((s − x1 − x2 − x3) * fV3(x1 + 1, x2, x3)
            + x1 * fV3(x1 − 1, x2 + 1, x3)
            + x2 * fV3(x1, x2 − 1, x3 + 1)
            + (s − x1 − x2 − x3) * (1 + fE3(x1 + 1, x2, x3)) ∧ 2
            + x1 * (1 + fE3(x1 − 1, x2 + 1, x3)) ∧ 2
            + x2 * (1 + fE3(x1, x2 − 1, x3 + 1)) ∧ 2
            + x3 * (1 + fE3(x1, x2, x3)) ∧ 2
            − s * fE3(x1, x2, x3) ∧ 2) / (s − x3)
        End If
      Next x2
    Next x1
  Next q
End Sub
```

59 Hilfsfunktionen für Randeffekte mit unzulässigen Zuständen

```
Function fE3(ByVal x1 As Integer, x2 As Integer, x3 As Integer) As Double 'Fall p=3
If (x1 < 0 Or x2 < 0) Or (x1 > s) Then
  fE3 = 0
Else
  fE3 = aE3(x1, x2, x3)
End If
End Function

Function fV3(ByVal x1 As Integer, x2 As Integer, x3 As Integer) As Double 'Fall p=3
If (x1 < 0 Or x2 < 0) Or (x1 > s) Then
  fV3 = 0
Else
  fV3 = aV3(x1, x2, x3)
End If
End Function
```

60 Aufruf des Hauptprogrammes:

```
Sub DruckeEV3
  ErzeugeEV3
  Debug.Print "E1="; aE3(0, s, 0)
  Debug.Print "V1="; aV3(0, s, 0)
  Debug.Print "S1="; Sqr(aV3(0, s, 0))
  Debug.Print "K1="; Sqr(aV3(0, s, 0)) / aE3(0, s, 0)
  Debug.Print "E2="; aE3(s, 0, 0)
  Debug.Print "V2="; aV3(s, 0, 0)
  Debug.Print "S2="; Sqr(aV3(s, 0, 0))
  Debug.Print "K2="; Sqr(aV3(s, 0, 0)) / aE3(s, 0, 0)
  Debug.Print "E3="; aE3(0, 0, 0)
  Debug.Print "V3="; aV3(0, 0, 0)
  Debug.Print "S3="; Sqr(aV3(0, 0, 0))
  Debug.Print "K3="; Sqr(aV3(0, 0, 0)) / aE3(0, 0, 0)
End Sub
```

61 Output:

```
E1=518.737751763962
V1=15831.101250085
S1=125.821704209111
K1=0.242553590482389
E2=728.805230496164
V2=20097.261799694
S2=141.764811570763
K2=0.194516731821821
E3=910.871708111364
V3=23774.4979693931
S3=154.189811496717
K3=0.169277199108994
```

62 Die Resultate für $p = 3$ Personen und also 3 komplette Alben lauten:
Der Erwartungswert für die Anzahl der nötigen Bilderkäufe ist $E(X^{(3)}) = 910.87$.
Die Standardabweichung ist $S(X^{(3)}) = 154.19$.
Der Variationskoeffizient ist $\dfrac{S(X^{(3)})}{E(X^{(3)})} = 16.93\%$.

Die Grössen pro Person sind:
Der Erwartungswert $E(\dfrac{X^{(p)}}{p}) = \dfrac{E(X^{(p)})}{p} = \dfrac{910.87}{3} = 303.62$ für $p = 3$.
Die Standardabweichung $S(\dfrac{X^{(p)}}{p}) = \dfrac{S(X^{(p)})}{p} = \dfrac{154.19}{3} = 51.40$ für $p = 3$.
Der Variationskoeffizient ist 16.93%.

63 Die Gemeinschaft aus $p = 3$ Sammlern gibt also im Mittel nur $\dfrac{303.62}{518.73} = 58.5\%$ des Betrages für den Einzelsammler aus.
Die Gemeinschaft aus $p = 3$ Sammlern spart somit im Mittel 41.5% gegenüber dem Einzelsammler.

64 In der nachfolgenden Tabelle sind die Erwartungswerte $e(s,p)/p$ für (s,p)-Kombinationen dargestellt, die weniger als 10'000'000 doubles an Speicherplatz in der Quaderdarstellung gemäss Punkt 70 benötigen.

	p=1	p=2	p=3	p=4	p=5	p=6	p=7
s=10	29.29	23.11	20.46	18.91	17.87	17.12	16.54
s=20	71.95	54.35	47.03	42.86	40.09	38.09	
s=30	119.85	88.60	75.83	68.59	63.83		
s=40	171.14	124.78	106.03	95.46	88.53		
s=50	224.96	162.40	137.28	123.18	113.95		
s=60	280.79	201.16	169.36	151.55			
s=70	338.30	240.86	202.12	180.48			
s=80	397.24	281.36	235.47	209.87			
s=90	457.43	322.57	269.32	239.67			
s=100	518.74	364.40	303.62	269.83			
s=200	1175.61	807.16	664.28	585.49			
s=300	1884.80	1278.94	1045.80				
s=400	2627.97	1769.49	1440.75				
s=500	3396.41	2273.93	1845.66				
s=600	4184.99	2789.44	2258.46				
s=700	4990.31	3314.12	2677.81				
s=800	5809.96	3846.65	3102.75				
s=900	6642.15	4386.02	3532.58				
s=1000	7485.47	4931.48	3966.73				
s=2000	16356.74	10624.70	8477.85				
s=3000	25751.25	16602.05	13190.52				
s=4000	35485.56	22763.33					
s=5000	45472.54	29061.10					

65 Dies führt dann auf folgende Prozentualen Ersparnisse $\dfrac{e(s,p)/p}{e(s,1)} - 1$:

	p=1	p=2	p=3	p=4	p=5	p=6	p=7
s=10	0.0%	-21.1%	-30.1%	-35.4%	-39.0%	-41.6%	-43.5%
s=20	0.0%	-24.5%	-34.6%	-40.4%	-44.3%	-47.1%	
s=30	0.0%	-26.1%	-36.7%	-42.8%	-46.7%		
s=40	0.0%	-27.1%	-38.0%	-44.2%	-48.3%		
s=50	0.0%	-27.8%	-39.0%	-45.2%	-49.3%		
s=60	0.0%	-28.4%	-39.7%	-46.0%			
s=70	0.0%	-28.8%	-40.3%	-46.7%			
s=80	0.0%	-29.2%	-40.7%	-47.2%			
s=90	0.0%	-29.5%	-41.1%	-47.6%			
s=100	0.0%	-29.8%	-41.5%	-48.0%			
s=200	0.0%	-31.3%	-43.5%	-50.2%			
s=300	0.0%	-32.1%	-44.5%				
s=400	0.0%	-32.7%	-45.2%				
s=500	0.0%	-33.0%	-45.7%				
s=600	0.0%	-33.3%	-46.0%				
s=700	0.0%	-33.6%	-46.3%				
s=800	0.0%	-33.8%	-46.6%				
s=900	0.0%	-34.0%	-46.8%				
s=1000	0.0%	-34.1%	-47.0%				
s=2000	0.0%	-35.0%	-48.2%				
s=3000	0.0%	-35.5%	-48.8%				
s=4000	0.0%	-35.9%					
s=5000	0.0%	-36.1%					

66 Fazit bei $s = 500$ Bildern spart man zu zweit etwa ein Drittel des Geldes, zu dritt etwa die Hälfte des Geldes.

5 Aufwand für die Berechnung des Erwartungswertes

67 Für jeden Zustand $\vec{i}$ benötigt man $p+1$ Multiplikationen zur Berechnung von $E[Y(\vec{i})]$. Das macht dann für alle Zustände zusammen $(p+1)\cdot\binom{s+p}{p} = O(s^p)$ Multiplikationen.

68 Der Speicherplatzbedarf ist enorm: In dem angegebenen Programm $(s+1)^p$.
Im Fall $s = 100$ und $p = 3$ sind dies $101^3 = 1030301$ doubles.

69 Der Speicherbedarf lässt sich durch effizienteres Programmieren etwas reduzieren:
Man kommt ohne Probleme mit den Indizes $(x_1, x_2, \ldots x_{p-1})$ des "ersten" Layers s aus, indem man Layer für Layer fortlaufend überschreibt. Die Nummern q der Layers laufen dabei rückwärts von s bis 0. Der Index x_p ergibt sich dabei jeweils als Restgrösse $x_p := q - \sum_{j=1}^{p-1} x_j$.

70 So kommt man im Fall s=100 und p=3 bei Ablage als Quader mit $(s+1)^{p-1} = 101^2 = 10201$ doubles, bei Ablage als Simplex sogar mit $\binom{s+p-1}{p-1} = \binom{102}{2} = 5151$ doubles aus.

71 Trotzdem bleibt der Platzbedarf für grössere p enorm: $\binom{s+p-1}{p-1} = O(s^{p-1})$ doubles.

6 Das Sammlerproblem für einen Sammler und Sets vom Umfang t

72 Die Bilder werden nicht einzeln sondern in Sets des Umfangs t verkauft. Alle Bilder eines Sets sind stets verschieden, ansonsten aber alle Kombinationen eines Sets gleich wahrscheinlich.

73 Es seien bereits k verschiedene Bilder vorhanden. Bezeichne $X(k)$ die mit dem nächsten Set neu dazukommenden Bilder.

74 Beim Kauf eines neuen t=5-er-Sets ergibt sich folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Anzahl x neuer Bilder: $P(X(k) = x) = \begin{cases} \dfrac{\binom{n-k}{x}\cdot\binom{k}{t-x}}{\binom{n}{t}} & \text{, für } 0 \le x \le \min(t, n-k) \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$

75 Bezeichne $Z(k)$ die Zufallsvariable für die Anzahl noch benötigter Setkäufe ab einem Bestand von k verschiedenen Bildern.

76 Dann gilt gemäss Formel über die bedingte Erwartung:
$E[Z(k)] = E\{E[Z(k)|X(k)]\} = \sum_{x=0}^{t} P[X(k)=x]\cdot E[Z(k)|X(k)=x] = \sum_{x=0}^{t} P[X(k)=x]\cdot\{1+E[Z(k+x)]\}$

77 Aufgelöst nach $E[Z(k)]$ ergibt sich: $E[Z(k)] = \dfrac{\sum_{x=1}^{t}\{P[X(k)=x]\cdot E[Z(k+x)]\} + 1}{1 - P[X(k)=0]}$

78 Damit wird jedes $E[Z(k)]$ auf eine Linearkombination von $E[Z(k')]$ mit $k' > k$ zurückgeführt. Als Startwert gilt $E[Z(n)] = 0$ - komplettes Album.

79 Im Fall $n = 100$, $t = 5$ ergibt sich so $A(100, 5) := E[Z(0)] = 102.051402$

80 In Wikipedia findet sich die Formel $B(n,t) := \dfrac{1}{t}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{n - k \operatorname{mod} t}{n-k}$ für den Erwartungswert der Anzahl zu kaufender Sets.

81 Die Formel scheint der Komplexität des Problems nicht ganz gerecht zu werden.

82 Am Beispiel $n = 100$, $t = 5$ ergibt sich $B(100,5) := \dfrac{1}{t}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{n - k \operatorname{mod} t}{n-k} = 101.235778.$

83 Der Vergleich mit $A(100,5)$ zeigt, dass die Formel falsch ist.

84 Die folgende Tabelle zeigt die Differenzen von $t \cdot B(n,t)$ zu $t \cdot A(n,t)$ für $5 \leq n \leq 15$ und $t = 5$ auf.

Albumgrösse	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Sets	1.0000	2.2000	2.7500	3.4582	4.1920	4.9340	5.6961	6.4784	7.2776	8.0929	8.9232
Bilder	5.0000	11.0000	13.7500	17.2909	20.9600	24.6699	28.4806	32.3920	36.3882	40.4643	44.6161
Formel Wiki	5.0000	11.0000	14.5000	17.1667	19.4167	21.4167	28.2500	32.4643	35.7560	38.5615	41.0615
Abweichung	0.000%	0.000%	+5.455%	-0.719%	-7.363%	-13.187%	-0.810%	+0.223%	-1.738%	-4.702%	-7.967%

7 Anhang

85 In Abschnitt 2 werden die Formeln aus nachfolgendem Satz 3 benötigt.
Der Beweis stützt sich auf den Satz 1 über die Vertauschbarkeit von Ableitung und $\lim\limits_{n\to\infty}$ einer Funktionenfolge $f_n(x)$.
Der Beweis von Satz 1 gehört zum Standardrepertoire einer Analysisgrundvorlesung im Studienfach Mathematik und wird hier nicht angeführt.

86 Satz 1:
Voraussetzung:
(V1) Die Funktionen $f_n(x)$ bilden eine Folge von auf dem Intervall $[a,b]$ differenzierbaren Funktionen, deren Ableitungen $f'_n(x)$ für $x \in [a,b]$ gleichmässig gegen die Funktion $g(x)$ konvergieren.
(V2) Es gibt ein $c \in [a,b]$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(c)$ existiert.
Folgerung:
(F1) Die $f_n(x)$ konvergieren gleichmässig auf $[a,b]$ gegen eine Funktion $f(x)$.
(F2) $f(x)$ ist differentierbar auf $[a,b]$ und es gilt $f'(x) = g(x)$.

87 Satz 2:
Voraussetzung:
Es gibt ein Q mit $0 < Q < 1$, für welches die folgenden beiden Bedingungen gelten:
$f_n(x)$ konvergiert gleichmässig für $x \in [-Q,Q]$ gegen $f(x)$
$g_n(x) := (x \cdot f_n(x))'$ konvergiert gleichmässig für $x \in [-Q,Q]$ gegen $g(x)$

Folgerung:
$g(x) = (x \cdot f(x))'$ auf $x \in [-Q,Q]$.

88 Beweis:
Wir wenden Satz 1 auf die Folge $x \cdot f_n(x)$ an. Dazu müssen wir zeigen, dass $x \cdot f_n(x)$ im Intervall $[-Q,Q]$ die beiden Voraussetzungen von Satz 1 erfüllt:
(V1) die Funktionenfolge $(x \cdot f_n(x))'$ konvergiert gemäss Voraussetzung gleichmässig auf $[-Q,Q]$ gegen $g(x)$
(V2) für $x = 0 \in [-Q,Q]$ gilt $x \cdot f_n(x) = 0$ was trivialerweise (gegen 0) konvergiert.
Nach Folgerung von Satz 1 konvergiert $x \cdot f_n(x)$ auf $[-Q,Q]$ gegen eine differentierbare Funktion $G(x)$ mit $G'(x) = g(x)$
Nach Voraussetzung konvergiert $f_n(x)$ auf $[-Q,Q]$ gegen $f(x)$. Also konvergiert $x \cdot f_n(x)$ auf $[-Q,Q]$ gegen $x \cdot f(x)$.
Zusammengesetzt ergibt sich $G(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x \cdot f_n(x) = x \cdot f(x)$.
Und damit $(x \cdot f(x))' = G'(x) = g(x)$. qed.

89 Satz 3:
Voraussetzung:
$|q| < 1$
Folgerung:
a) $\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = \frac{1}{1-q}$
b) $\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$
c) $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot q^{k-1} = \frac{1+q}{(1-q)^3}$

90 Beweis:
a) Aus der Identität $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ ergibt sich die Summe der Geometrischen Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ zu $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}$ für $-1 < q < 1$. qed.

b) Setze $Q := \frac{1+|q|}{2} < \frac{1+1}{2} = 1$ und $f_n(x) := \sum_{k=1}^{n} x^{k-1}$

Dann gilt $g_n(x) := (x \cdot f_n(x))' = (\sum_{k=1}^{n} x^k)' = \sum_{k=1}^{n} k \cdot x^{k-1}$ nach Summenregel der Ableitung.

Für $|x| \le Q$ gilt $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|x^{k-1}|} \le Q < 1$ und $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|k \cdot x^{k-1}|} \le Q < 1$.
Gemäss Wurzelkriterium konvergieren deshalb $f_n(x)$ und $g_n(x)$ gleichmässig für $x \in [-Q, Q]$.
Die Grenzfunktionen bezeichnen wir mit $f(x)$ bzw. $g(x)$.
Gemäss Satz 2 und a) folgt:
$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot x^{k-1} = g(x) = (x \cdot f(x))' = (\frac{x}{1-x})' = \frac{1 \cdot (1-x) - x \cdot (-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$
Beachtet man $-Q \le q \le Q$ und setzt $x = q$ in die Gleichung ein, so erhält man die Behauptung. qed.

c) Setze $Q := \frac{1+|q|}{2} < 1$ und $f_n(x) := \sum_{k=1}^{n} k \cdot x^{k-1}$

Dann gilt $g_n(x) := (x \cdot f_n(x))' = (\sum_{k=1}^{n} k \cdot x^k)' = \sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot x^{k-1}$ nach Summenregel der Ableitung.

Nach Wurzelkriterium $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|k \cdot x^{k-1}|} \le Q < 1$ bzw. $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|k^2 \cdot x^{k-1}|} \le Q < 1$ konvergieren $f_n(x)$ und $g_n(x)$ gleichmässig auf $[-Q, Q]$. Die Grenzfunktionen bezeichnen wir mit $f(x)$ bzw. $g(x)$.
Gemäss Satz 2 und b) folgt:
$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot x^{k-1} = g(x) = (x \cdot f(x))' = (\frac{x}{(1-x)^2})' = \frac{1 \cdot (1-x)^2 - x \cdot 2 \cdot (1-x) \cdot (-1)}{(1-x)^4} = \frac{(1-x) \cdot ((1-x) + 2x)}{(1-x)^4} =$$
$$= \frac{1+x}{(1-x)^3}$$
Beachtet man $-Q \le q \le Q$ und setzt $x = q$ in die Gleichung ein, so erhält man die Behauptung. qed.

91 Satz 4:
Die Folge $a_n := \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x} - (\ln(n) + \ln(n+1))/2$ ist monton fallend gegen ihren Grenzwert $\gamma \approx 0.5772$. Die Folge $b_n := \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x} - \ln(n+1)$ ist monton wachsend gegen denselben Grenzwert γ.

92 Beweis:

Wegen $\ln(n) = \ln(n) - \ln(1) = \int\limits_1^n \frac{1}{x}\,dx$ gilt

$a_n = \sum\limits_{x=1}^{n} \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \cdot \left(\int\limits_1^n \frac{1}{x}\,dx + \int\limits_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx \right)$

Die Differenz $a_{n+1} - a_n$ ist stets negativ:

$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2} \cdot \int\limits_n^{n+2} \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \int\limits_n^{n+2} (\frac{1}{n+1} - \frac{1}{x})\,dx < 0$, denn nach Jensens Ungleichung gilt für die konvexe Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ und Zufallsvariable X gleichverteilt auf Intervall $[n, n+2]$, dass $E[f(X)] > f[E(X)]$, also mit Integralen geschrieben:

$\frac{1}{2} \int\limits_n^{n+2} \frac{1}{x}\,dx > \frac{1}{2} \int\limits_n^{n+2} \frac{1}{n+1}\,dx$ und also $\frac{1}{2} \cdot \int\limits_n^{n+2} (\frac{1}{n+1} - \frac{1}{x})\,dx < 0$

Die Differenz $b_{n+1} - b_n$ ist stets positiv:

$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n+1} - \int\limits_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = \int\limits_n^{n+1} (\frac{1}{n+1} - \frac{1}{x})\,dx < 0$

$a_n - b_n = (\ln(n+1) - \ln(n))/2 > 0$

Zusammengefasst heisst das:

Die b_n bilden eine monoton wachsende nach oben beschränkte (durch $a_1 = 1 - \frac{\ln(2)}{2} = 0.6534$) Folge und konvergieren deshalb in $\mathbb{R}$ gegen eine Zahl β

Die a_n bilden eine monoton fallende nach unten beschränkte (durch $b_1 = 1 - \ln(2) = 0.3069$) Folge und konvergieren deshalb in $\mathbb{R}$ gegen eine Zahl α

Da $\alpha - \beta = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(\ln(n+1) - \ln(n))/2 = \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{\ln(\frac{n+1}{n})}{2}) = \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{2}) = \frac{\ln(1)}{2} = 0$, folgt $\alpha = \beta$.

Um nun noch den Grenzwert $\gamma := \alpha = \beta$ zu bestimmen beachte man $b_n < \gamma < a_n$:

n	a_n	b_n
1	0.653426	0.306853
10	0.578728	0.531073
100	0.577232	0.572257
1000	0.577216	0.576716
10000	0.577216	0.577166

Also $\gamma = 0.5772$, auf 4 Stellen gerundet. qed

Literaturverzeichnis

Engel Arthur (1973): Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik Band 1. 1. Auflage. Stuttgart: Klett Studienbücher

Engel Arthur (1976): Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik Band 2. 1. Auflage. Stuttgart: Klett Studienbücher