Fachhochschule Nordwestschweiz
Hochschule für Wirtschaft

# $e$ wie Euler

## Stetige Verzinsung und die natürlichen Basis $e$

Studie

Autor: Helmut Vetter
Ort, Datum: Arlesheim, 16.11.2018

Diese Arbeit wurde mit TexLive erstellt.

$e$ wie Euler
Stetige Verzinsung und die natürlichen Basis $e$

**Autor**
Vetter, Helmut
Schillerweg 2
CH-4144 Arlesheim
061 599 51 09
helmut.vetter@fhnw.ch

**Auftraggeberschaft**
Nils Beutling, Student FHNW, BÖK Basel

Arlesheim, November 2018

**Ehrenwörtliche Erklärung**

Ich versichere, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne Benutzung anderer als der im Literaturverzeichnis angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Die wörtlich oder inhaltlich den im Literaturverzeichnis aufgeführten Quellen und Hilfsmitteln entnommenen Stellen sind in der Arbeit als Zitat bzw. Paraphrase kenntlich gemacht.

Diese Arbeit ist noch nicht veröffentlicht worden. Sie ist somit weder anderen Interessenten zugänglich gemacht noch einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt worden.

Arlesheim, 16.11.2018

Helmut Vetter

Helmut Vetter

## Management Summary

Das Kapitel 1 der X-Files behandelt das Thema stetige Verzinsung und die sich in diesem Zusammenhang ergebende Eulersche Zahl $e$.
Die X-Files behandeln Detailfragen von Studierenden, deren Behandlung den Rahmen der Vorlesung Wirtschaftsmathematik sprengen würden.
In mathematischem Kontext müssen Aussagen bewiesen werden!
Die Beweise sind mit †. . . † gekennzeichnet.

# Inhaltsverzeichnis

# 1 $e$ wie Euler

Angeregt durch Herrn Nils Beutling.

## 1.1 Ziel

1 Aussage: Bei einem Zinssatz von $p > 0$ pro Jahr, ergibt sich aus einem Anfangskapital von $K_0$ bei stetiger Verzinsung (Pro-Rata-Zinsen werden laufend zum Kapital geschlagen und mitverzinst) ein Kapitalstand auf Termin $t \in \mathbb{R}^+$ Jahre von $K(t) = K_0 \cdot e^{p \cdot t}$.

## 1.2 Konstruktion Teil 1

2 Definition 1-1 (Definition $Q(T, p)$)

> Eine endliche Menge $T$ von Zinszeitpunkten auf $[0, t]$ ist eine Menge
> $T = \{0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = t\}$.
> Bezeichne $K_0$ das Anfangskapital auf Termin $t = 0$.
> Bezeichne $p$ den Zinssatz pro Jahr.
> Wir erhalten den zu den Zinszeitpunkten $T$ zugehörigen Wert des Kapitals $K(T, p)$ auf Termin $t$:
> $K(T, p) = K_0 \cdot (1 + t_1 \cdot p) \cdot (1 + (t_2 - t_1) \cdot p) \cdot \ldots \cdot (1 + (t_n - t_{n-1}) \cdot p) = K_0 \cdot \prod_{k=1}^{n}(1 + (t_k - t_{k-1}) \cdot p)$.
> Als zugehöriger Wachstumsfaktor $Q(T, t) = \dfrac{K(T, p)}{K_0}$ ergibt sich somit das Produkt
> $Q(T, p) = \prod_{k=1}^{n}(1 + (t_k - t_{k-1}) \cdot p)$.

3 Satz 1-2 (Obere Schranke für $Q(T, p)$)

Voraussetzung:

Es gelte $p > 0$

Es gelte $t \cdot p < 1$

$T$ sei eine endliche Menge von Zinszeitpunkten auf $[0, t]$

Behauptung:

Dann ist $Q(T, p) \leq \dfrac{1}{1 - t \cdot p}$

4 Beweis: †

Bezeichnet man die Zwischenwerte der Zinsstaffel mit

$K_1 = K_0 \cdot (1 + t_1 \cdot p) = K_0 + K_0 \cdot t_1 \cdot p$

$K_2 = K_1 \cdot (1 + (t_2 - t_1) \cdot p) = K_1 + K_1(t_2 - t_1) \cdot p$

...

$K_n = K_{n-1} \cdot (1 + (t - t_{n-1}) \cdot p) = K_{n-1} + K_{n-1} \cdot (t - t_{n-1}) \cdot p$

So gilt $K(T, p) = K_n$.

Für $p > 0$ ist $K_0 < K_1 < \ldots < K_n$.

5 Zusammengesetzt ergibt sich

$$\begin{aligned} K_n &= K_0 + K_0 \cdot t_1 \cdot p + K_1 \cdot (t_2 - t_1) \cdot p + \ldots + K_{n-1} \cdot (t - t_{n-1}) \cdot p \\ &< K_0 + K_n \cdot t_1 \cdot p + K_n \cdot (t_2 - t_1) \cdot p + \ldots + K_n \cdot (t - t_{n-1}) \cdot p \\ &= K_0 + K_n \cdot t \cdot p \end{aligned}$$

Also: $K_n < K_0 + K_n \cdot t \cdot p \quad \big| -K_n \cdot t \cdot p$

$K_n \cdot (1 - t \cdot p) < K_0 \quad \big| : (1 - t \cdot p)$ falls $t \cdot p < 1$

$$K_n < \frac{K_0}{1 - t \cdot p}$$

Nach Division durch $K_0$ also wie behauptet

$$Q(T,p) = \frac{K(T,p)}{K_0} \leq \frac{1}{1 - t \cdot p}$$ †

6 Satz $\boxed{1\text{-}3}$ (Verfeinerung von $T$)

Voraussetzung:

Sei $T$ eine endliche Menge von Zinszeitpunkten auf dem Intervall $[0,t]$

Sei $T'$ eine Verfeinerung von $T$, d.h. $T'$ ist ebenfalls eine endliche Menge von Zinszeitpunkten auf dem Intervall $[0,t]$ mit $T' \supseteq T$.

Behauptung:

Dann gilt $K(T',p) \geq K(T,p)$. - Zinseszinseffekt!

7 Beweis: †

Enthält das Intervall $]t_{k-1}, t_k[$ einen weiteren Zinspunkt $s$, so gilt

$$\begin{aligned} &(1 + (t_k - s) \cdot p) \cdot (1 + (s - t_{k-1}) \cdot p) \\ &\quad = 1 + (t_k - s) \cdot p + (s - t_{k-1}) \cdot p + (t_k - s) \cdot (s - t_{k-1}) \cdot p^2 \\ &\quad = 1 + (t_k - t_{k-1}) \cdot p + \underbrace{(t_k - s)}_{>0} \cdot \underbrace{(s - t_{k-1})}_{>0} \cdot \underbrace{p^2}_{>0} \\ &\quad > 1 + (t_k - t_{k-1}) \cdot p \end{aligned}$$ †

8 Satz $\boxed{1\text{-}4}$ (Obere Schranke für $Q(T,p)$)

Voraussetzung:

Es gelte $p > 0$

Es gelte $t \cdot p < n$ und $T$ sei eine endliche Menge von Zinszeitpunkten auf $[0,t]$

Behauptung:

Dann ist $Q(T,p) \leq \dfrac{1}{(1 - \dfrac{t \cdot p}{n})^n}$

9 Beweis: †

Betrachte $T' = \{0 < \frac{t}{n} < \frac{2 \cdot t}{n} < \ldots < \frac{(n-1) \cdot t}{n} < t\}$.

Sei $T'' = T \cup T'$ und $T''_k = T'' \cap [0, \frac{k \cdot t}{n}]$ für $k \in \{1, 2, 3, \ldots n-1\}$

Nach Satz 1-3 und Satz 1-2 ergibt sich

$$Q(T,p)$$
$$\leq Q(T'',p)$$
$$\leq \frac{Q(T''_{n-1},p)}{1 - \frac{t \cdot p}{n}}$$
$$\leq \frac{Q(T''_{n-2},p)}{(1 - \frac{t \cdot p}{n})^2}$$
$$\leq \ldots$$
$$\leq \frac{1}{(1 - \frac{t \cdot p}{n})^n}$$ †

## 1.3 Vollständigkeit der reellen Zahlen

10 Definition $\boxed{\text{1-5}}$ (Obere Schranke)

> Eine Zahl $b$ heisst obere Schranke der Menge $A \subseteq \mathbb{R}$, falls $a \leq b$ für alle $a \in A$. Man schreibt dafür intuitiv verständlich $A \leq b$.

11 Definition $\boxed{\text{1-6}}$ (Kleinste obere Schranke)

> Eine Zahl $b$ heisst kleinste obere Schranke der Menge $A$, falls
> 1) $A \leq b$ und
> 2) für jede obere Schranke $c$ von $A$ gilt $b \leq c$.

12 Satz $\boxed{\text{1-7}}$ (Vollständigseigenschaft der reellen Zahlen)

Behauptung:

Jede Menge $\neq \{\}$ von reellen Zahlen hat eine kleinste obere Schranke in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

$\infty$ ergibt sich genau dann als kleinste obere Schranke, wenn die Menge nach oben unbeschränkt ist.

13 Beweis: †

Die Vollständigkeit ist die grundlegende Eigenschaft im Konstruktionsprozess der reellen Zahlen als Obermenge der rationalen Zahlen. Sie soll hier ohne Beweis vorausgesetzt sein. †

14 Satz $\boxed{\text{1-8}}$ (Eindeutigkeit)

Behauptung:

Die kleinste obere Schranke einer Menge $A \neq \{\}$ ist eindeutig bestimmt.

15 Beweis: †

Sind $b$ und $c$ kleinste obere Schranken der Menge $A \neq \{\}$.

Falls eine der beiden Schranken $\infty$ ist, so ist die Menge unbeschränkt und es gibt keine endliche obere Schranke. Also mus gelten $b = c = \infty$

Falls $b$ und $c$ beide endlich sind, gilt gemäss Definition der kleinste oberen Schranke $c \leq b$ und ebenso $b \leq c$. Also ist $b = c$. †

16 Satz 1-9 (Kleinste obere Schranke)

Behauptung:

Die kleinste obere Schranke einer Menge $A \neq \{\}$ kann so beschrieben werden:

$b$ ist kleinste obere Schranke von $A$, genau dann wenn

- Fall $b < \infty$
  1) $A \leq b$
  2) Für jedes $\epsilon > 0$ ist $b - \epsilon$ nicht obere Schranke, d.h. es gibt $a \in A$ mit $a > b - \epsilon$.
- Fall $b = \infty$
  Für jedes $M$ in $\mathbb{R}$ gibt es $a \in A$ mit $a \geq M$, da $A$ unbeschränkt ist.

17 Satz 1-10 ($\mathbb{Q}$ ist unvollständig)

Behauptung:

Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ hat die Vollstängigkeitseigenschaft nicht!

Das heisst es gibt Mengen $A \subseteq \mathbb{Q}$ welche keine kleinste obere Schranke haben.

18 Beweis: †

Die Menge $A = \{x \mid x > 0 \text{ und } x^2 < 2\}$ hat in $\mathbb{Q}$ keine kleinste obere Schranke.

Annahme $\frac{p}{q}$ sei kleinste obere Schranke von $A$.

Da $1^2 < 2$ gilt, ist $1 \in A$ und es muss wegen $A \leq \frac{p}{q}$ auch $1 \leq \frac{p}{q}$ gelten.

Der Bruch ist somit positiv und wir können notfalls via Erweiterung mit $-1$ erreichen, dass $p$ und $q > 0$ sind.

Wir können den Bruch kürzen.

Somit können wir annehmen, dass die obere Schranke durch einen Bruch $\frac{p}{q}$ mit positiven und teilerfremden $p$ und $q$ dargestellt ist.

19 Die folgende Fallunterscheidung führt zum Schluss, dass es eine obere Schranke der Form $\frac{p}{q}$ nicht geben kann!

20 Fall 1: $(\frac{p}{q})^2 < 2$

$$\Rightarrow p^2 < 2q^2 \quad \Big| \text{ ganze Zahlen!}$$

$$\Rightarrow p^2 \leq 2q^2 - 1$$

$$\Rightarrow (p + \frac{1}{4p})^2 = p^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16p^2} \leq p^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} = p^2 + \frac{9}{16} \quad \Big| p^2 \leq 2q^2 - 1$$

$$\leq 2q^2 - 1 + \frac{9}{16} = 2q^2 - \frac{7}{16} < 2q^2$$

Division durch $q^2$ liefert

$$\frac{(p + \frac{1}{4p})^2}{q^2} < 2$$

$$\frac{(\frac{4p^2+1}{4p})^2}{q^2} < 2$$

$$(\frac{4p^2+1}{4pq})^2 < 2$$

Also gilt $\frac{4p^2+1}{4pq} \in A$.

da aber $\frac{4p^2+1}{4pq} > \frac{4p^2}{4pq} = \frac{p}{q}$ gilt, ist nicht $A < \frac{p}{q}$ und $\frac{p}{q}$ ist nicht obere Schranke von $A$, im Widerspruch zur Annahme.

21 Fall 2: $(\frac{p}{q})^2 = 2$

$$\Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2$$

$$\Rightarrow p^2 = 2q^2$$

Zerlege die Zahlen $p$ und $q$ in Ihre Primfaktoren.

Der Primfaktor $2$ kommt auf der rechten Seite der Gleichung in einer geraden Anzahl (0,2,4,6,...) vor, auf der linken Seite in einer ungeraden Anzahl (1,3,5,7,...).

Dies ist aufgrund der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung der natürlichen Zahl $p^2$ nicht möglich.

22 Fall 3: $(\frac{p}{q})^2 > 2$

$\Rightarrow p^2 > 2q^2$ | ganze Zahlen!

$\Rightarrow p^2 \geq 2q^2 + 1$

$\Rightarrow (p - \frac{1}{4p})^2 = p^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{16p^2} \geq p^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{16} = p^2 - \frac{7}{16}$ | $p^2 \geq 2q^2 + 1$

$\geq 2q^2 + 1 - \frac{7}{16} = 2q^2 + \frac{9}{16} > 2q^2$

Division durch $q^2$ liefert

$$\frac{(p - \frac{1}{4p})^2}{q^2} > 2$$

$$\frac{(\frac{4p^2-1}{4p})^2}{q^2} > 2$$

$$(\frac{4p^2-1}{4pq})^2 > 2$$

Bemerkung: Gilt $x > 0$ und $y > 0$, so folgt aus $x > y$, dass $x^2 > y^2$ und umgekehrt aus $x^2 > y^2$ folgt $x > y$.

Beweis: †

$x > y$ | $\cdot x > 0$

$x^2 > xy$

$x > y$ | $\cdot y > 0$

$xy > y^2$

Zusammen also $x^2 > xy > y^2$

Umgekehrt:

Wir wissen aus dem ersten Teil:

$x < y \Rightarrow x^2 < y^2$ und mit vertauschten Rollen also

$x > y \Rightarrow x^2 > y^2$

Zudem gilt klarerweise $x = y \Rightarrow x^2 = y^2$.

Setzen wir $x^2 > y^2$ voraus, so ist dies nur verträglich mit dem Fall $x > y$. †

Aus $(\frac{4p^2-1}{4pq})^2 > 2$ folgt $\frac{4p^2-1}{4pq} > x$ für alle $x \in A$, also ist $\frac{4p^2-1}{4pq}$ obere Schranke von $A$.

Da aber $\frac{4p^2-1}{4pq} < \frac{4p^2}{4pq} = \frac{p}{q}$ gilt, ist $\frac{p}{q}$ nicht kleinste obere Schranke von $A$, im Widerspruch zur Annahme.

†

23 Bemerkung: In $\mathbb{R}$ ist $\sqrt{2} = 1.4142135\ldots$ die kleinste obere Schranke der Menge

$A = \{x \mid x > 0$ und $x^2 < 2\}$

## 1.4 Kontruktion Teil 2

24 Definition 1-11 (Definition $Q(t, p)$)

> Gegeben: Zinssatz $p > 0$ pro Jahr, Dauer $t$ in Jahren.
>
> $M(t, p) = \{Q(T, p) \mid T$ ist endliche Menge von Zinszeitpunkten auf dem Intervall $[0, t]\}$.
>
> $Q(t, p)$ bezeichnet die kleinste obere Schranke der Menge $M(t, p)$.

25 <u>Satz</u> 1-12 (Untere und obere Schranke für $Q(t,p)$)

<u>Behauptung</u>:

Für $t_1 \in ]0,t[$ gilt

a) $Q(t,p) \geq Q(t_1,p) \cdot (1+(t-t_1)\cdot p)$

b) $Q(t,p) \leq \dfrac{Q(t_1,p)}{1-(t-t_1)\cdot p}$, falls $(t-t_1)\cdot p < 1$.

26 <u>Beweis</u>: †

a) Nach Defintion der kleinsten oberen Schranke $Q(t_1,p)$ gibt es für jedes $\epsilon > 0$ eine endliche Menge von Zinszeitpunkten $T_1$ auf $[0,t_1]$, mit $Q(T_1,p) > Q(t_1,p) - \epsilon$

$T = T_1 \cup \{t\}$ ist dann eine endliche Menge von Zinszeitpunkten auf $[0,t]$ mit

$Q(T,p) = Q(T_1,p)\cdot(1+(t-t_1)\cdot p) > (Q(t_1,p)-\epsilon)\cdot(1+(t-t_1)\cdot p)$

Wäre $Q(T,p) < Q(t_1,p)\cdot(1+(t-t_1)\cdot p)$, so wähle

$\epsilon = Q(t_1,p) - \dfrac{Q(T,p)}{1+(t-t_1)\cdot p} = \dfrac{Q(t_1,p)\cdot(1+(t-t_1)\cdot p) - Q(T,p)}{1+(t-t_1)\cdot p} > 0.$

Es ergibt sich dann:

$$\begin{aligned}
Q(T,p) &= Q(T_1,p)\cdot(1+(t-t_1)\cdot p)\\
&> (Q(t_1,p)-\epsilon)\cdot(1+(t-t_1)\cdot p)\\
&= (Q(t_1,p)-(Q(t_1,p)-\frac{Q(T,p)}{1+(t-t_1)\cdot p}))\cdot(1+(t-t_1)\cdot p)\\
&= Q(T,p), \text{ also ein Widerspruch.}
\end{aligned}$$

Somit ist die Annahme $Q(T,p) < Q(t_1,p)\cdot(1+(t-t_1)\cdot p)$ falsch und es gilt

$Q(T,p) \geq Q(t_1,p)\cdot(1+(t-t_1)\cdot p)$ wie behauptet.

27 b) Aus a) folgt $Q(t,p) \geq Q(t_1,p)\cdot(1+(t-t_1)\cdot p) > Q(t_1,p)$ für $t > t_1$.

Das heisst $Q(t,p)$ ist monoton wachsend als Funktion von $t$.

Aus Satz 1-2 ergibt sich für $t\cdot p < 1$, dass

$Q(T,p) \leq \dfrac{K_0}{1-t\cdot p}$, also $Q(t,p) \leq \dfrac{K_0}{1-t\cdot p}$ gilt.

oder in mehreren Etappen: $Q(t,p) \leq \dfrac{K_0}{(1-\frac{t\cdot p}{n})^n}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $n > t\cdot p$.

Somit ist $Q(t,p) < \infty$.

Für $\epsilon > 0$ sei $T_1$ eine Menge von Zinszeitpunkten auf $[0,t]$ mit $Q(T_1,p) > Q(t,p) - \epsilon$.

Sei $s \in ]0,t[$. $T = T_1 \cup \{s\}$ und $S = T \cap [0,s]$.

Es gilt $Q(T,p) \geq Q(T_1,p) > Q(t,p) - \epsilon$.

$Q(t,p) - \epsilon < Q(T_1,p) < Q(T,p) \leq \dfrac{Q(S,p)}{1-(t-s)\cdot p} < \dfrac{Q(s,p)}{1-(t-s)\cdot p}$ für $(t-s)\cdot p < 1$.

Für alle $\epsilon > 0$. Wäre $Q(t,p) > \dfrac{Q(s,p)}{1-(t-s)\cdot p}$, so defiere $\epsilon = Q(t,p) - \dfrac{Q(s,p)}{1-(t-s)\cdot p}$.

Dies führt auf den Widerspruch:

$Q(t,p) - \epsilon = Q(t,p) - (Q(t,p) - \dfrac{Q(s,p)}{1-(t-s)\cdot p}) = \dfrac{Q(s,p)}{1-(t-s)\cdot p} > \dfrac{Q(s,p)}{1-(t-s)\cdot p}$.

Also muss $Q(t,p) \leq \dfrac{Q(s,p)}{1-(t-s)\cdot p}$ gelten. †

28 Satz $\boxed{\text{1-13}}$ (Obere Schranke für $Q(t,p)$)

Voraussetzung:

Sei $n \in \mathbb{N}$

Behauptung:

Dann gilt $Q(t,p) \geq (1+\dfrac{t\cdot p}{n})^n$
Speziell gilt also $Q(t,p) > 1$

29 Beweis: †

Wähle als Zinszeitpunkte $T = \{0 < \dfrac{t}{n} < \dfrac{2\cdot t}{n} < \ldots < \dfrac{(n-1)\cdot t}{n} < t\}$.

Dann gilt $Q(t,p) \geq Q(T,p) = (1+\dfrac{t\cdot p}{n})^n$ †

30 Satz $\boxed{\text{1-14}}$ (Untere Schranke für $Q(t,p)$)

Voraussetzung:

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n > p\cdot t$

Behauptung:

Dann gilt $Q(t,p) \leq \dfrac{1}{(1-\dfrac{t\cdot p}{n})^n}$
Speziell gilt also $Q(t,p) < \infty$

31 Beweis: †

Nach Satz 1-12 mit $t_1 = \dfrac{n-1}{n}\cdot t$ usw. gilt:

$$
\begin{aligned}
&Q(t,p)\\
&\leq \frac{Q(\frac{n-1}{n}\cdot t,p)}{1-\frac{t\cdot p}{n}}\\
&\leq \frac{Q(\frac{n-2}{n}\cdot t,p)}{(1-\frac{t\cdot p}{n})^2}\\
&\leq \ldots\\
&\leq \frac{1}{(1-\frac{t\cdot p}{n})^n}
\end{aligned}
$$
†

32 Satz $\boxed{\text{1-15}}$ (Faktortausch)

Behauptung:

Für $x > 0$ gilt $Q(xt,p) = Q(t,xp)$

33 Beweis: †

Jeder endlichen Menge $T$ von Zinszeitpunkten auf $[0,t]$ wird durch Multiplikation mit $x$ eineindeutig eine endliche Menge $x \cdot T$ von Zinszeitpunkten auf $[0,xt]$ zugeordnet.

$Q(T,xp) = \prod_{k=1}^{n}(1+(t_k - t_{k-1}) \cdot xp) = \prod_{k=1}^{n}(1+(xt_k - xt_{k-1}) \cdot p) = Q(xT,p)$

Damit stimmt die Menge $M(t,xp)$ mit der Menge $M(xt,p)$ überein und damit auch die kleinsten oberen Schranke $Q(t,xp)$ und $Q(xt,p)$. †

34 Satz $\boxed{\text{1-16}}$ (Exponentialeigenschaft)

Behauptung:

$Q(t_1+t_2,p) = Q(t_1,p) \cdot Q(t_2,p)$

35 Beweis: †

Sei $T_1$ eine endliche Menge von Zinszeitpunkten auf $[0,t_1]$, sodass gemäss Definition kleinste obere Schranke

$Q(T_1,p) \geq Q(t_1,p) - \epsilon$

Sei $T_2$ eine endliche Menge von Zinszeitpunkten auf $[0,t_2]$, sodass gemäss Definition kleinste obere Schranke

$Q(T_2,p) \geq Q(t_2,p) - \epsilon$

Dann ist $T = T_1 \cup \{t_1 + t \mid t \in T_2\}\}$ eine endliche Menge von Zinszeitpunkten auf $[0, t_1+t_2]$.

Es gilt gemäss Defintion $Q(T,p) = Q(T_1,p) \cdot Q(T_2,p)$

Also ist $Q(t_1+t_2,p) \geq Q(T,p) = Q(T_1,p) \cdot Q(T_2,p) \geq (Q(t_1,p)-\epsilon) \cdot (Q(t_2,p)-\epsilon)$

Wäre $Q(t_1,p) \cdot Q(t_2,p) > Q(t_1+t_2,p)$, also $Q(t_1,p) \cdot Q(t_2,p) - Q(t_1+t_2,p) = \delta > 0$,

so setze $\epsilon = \dfrac{\delta}{Q(t_1,p)+Q(t_2,p)} > 0$, da $Q(t_1,p) < \infty$ und $Q(t_2,p) < \infty$ nach Satz 1-14.

Es ergibt sich

$$
\begin{aligned}
&(Q(t_1,p)-\epsilon) \cdot (Q(t_2,p)-\epsilon) \\
&\quad = Q(t_1,p) \cdot Q(t_2,p) - \epsilon \cdot (Q(t_1,p)+Q(t_2,p)) + \epsilon^2 \\
&\quad > Q(t_1,p) \cdot Q(t_2,p) - \delta \\
&\quad = Q(t_1+t_2,p)
\end{aligned}
$$

Dies steht im Widerspruch zu $Q(t_1+t_2,p) \geq (Q(t_1,p)-\epsilon) \cdot (Q(t_2,p)-\epsilon)$

Somit liefert $Q(t_1,p) \cdot Q(t_2,p) > Q(t_1+t_2,p)$ einen Widerspruch und es muss also $Q(t_1,p) \cdot Q(t_2,p) \leq Q(t_1+t_2,p)$ gelten.

Umgekehrt sei $T$ eine endliche Menge von Zinszeitpunkten auf $[0,t_1+t_2]$ mit $Q(T,p) \geq Q(t_1+t_2,p) - \epsilon$.

Definiere $T' = T \cup \{t_1\}$ und $T_1 = T' \cap [0,t_1]$, $T_2 = \{t - t_1 \mid t \in T'$ und $t \geq t_1\}$

Es gilt $Q(t_1+t_2,p) - \epsilon \leq Q(T,p) = Q(T_1,p) \cdot Q(T_2,p) \leq Q(t_1,p) \cdot Q(t_2,p)$.

Wäre $Q(t_1+t_2,p) > Q(t_1,p) \cdot Q(t_2,p)$, so setze $\epsilon = Q(t_1+t_2,p) - Q(t_1,p) \cdot Q(t_2,p) > 0$, was auf $Q(t_1+t_2,p) - \epsilon = Q(t_1,p) \cdot Q(t_2,p)$ und zum Widerspruch zu $Q(t_1+t_2,p) - \epsilon \leq Q(t_1,p) \cdot Q(t_2,p)$ führt.

Damit ist die Annahme $Q(t_1+t_2,p) > Q(t_1,p) \cdot Q(t_2,p)$ falsch und es gilt $Q(t_1+t_2,p) \leq Q(t_1,p) \cdot Q(t_2,p)$.

Zusammen erhalten wir $Q(t_1+t_2,p) = Q(t_1,p) \cdot Q(t_2,p)$ †

36 Satz $\boxed{1\text{-}17}$ (Exponentialfunktion)

| |
|---|
| Voraussetzung:<br><br>Es sei $t \geq 0,\ p > 0$ |
| Behauptung:<br><br>Dann gilt $Q(t,p) = \ell^{\,t\cdot p}$ mit $\ell = Q(1,1)$ |

37 Beweis: †

Definiere: $h(x) = \log(Q(x,1))$

Nach Satz 1-16 ergibt sich:

$h(x+y) = \log(Q(x+y,1)) = \log(Q(x,1)\cdot Q(y,1)) = \log(Q(x,1)) + \log(Q(y,1)) = h(x) + h(y)$

Für $n \in \mathbb{N}$ ist $h(n\cdot x) = n\cdot h(x)$.

Nachweis: $h(n\cdot x) = h(x+x+\ldots+x) = h(x)+h(x)+\ldots+h(x) = n\cdot h(x)$

- Für $q \in \mathbb{Q}^+$ ist $h(q\cdot x) = q\cdot h(x)$.

Nachweis: Sei $q = \dfrac{q_1}{q_2}$, dann ist $q\cdot q_2 = q_1$ und also nach vorhergehender Zeile:

$$h(q_1\cdot x) = h(q_2\cdot q\cdot x)$$
$$q_1\cdot h(x) = q_2\cdot h(q\cdot x) \quad \Big|: q_2$$
$$\frac{q_1}{q_2}\cdot\cdot h(x) = h(q\cdot x) \quad \Big| q = \frac{q_1}{q_2}$$
$$q\cdot h(x) = h(q\cdot x)$$

- $h(x)$ ist streng monoton wachsend.

Nachweis: $h(x+y) = h(x) + h(y) > h(x)$, da $h(y) = \log(Q(y,1)) > \log(1) = 0$ nach Satz 1-13.

- $h(x)$ ist stetig.

Nachweis: $0 < h(x+t) - h(x) = h(t) = \log(Q(h,1)) \leq \log(\dfrac{1}{1-t}) \to 0$ für $t \to 0$, gemäss Satz 1-14.

- Für $r \in \mathbb{R}^+$ ist $h(r\cdot x) = r\cdot h(x)$.

Nachweis:

Sei $q_n$ eine Folge rationaler Zahlen mit $q_n \to r$. Dann gilt wegen der Stetigkeit von $h(x)$,

dass $h(q_n\cdot x) \to h(r\cdot x)$.

Klarerweise gilt $q_n\cdot h(x) \to r\cdot h(x)$.

Aus dem Vohergegangenen gilt für $q_n \in \mathbb{Q}$, dass $h(q_n\cdot x) = q_n\cdot h(x)$

Zusammen ergibt sich: $h(q_n\cdot x) = q_n\cdot h(x) \to h(r\cdot x) = r\cdot h(x)$

Daraus ergibt sich nun für $r = x$ und $x = 1$

$h(x) = x\cdot h(1)$

Bezeichne die Zahl $h(1)$ mit $c$.

Also gilt: $h(x) = c\cdot x$

$\log(Q(x,1)) = c\cdot x \quad \Big| 10^*$

$Q(x,1) = 10^{\,c\cdot x}$

$Q(t,p) = Q(t\cdot p,1) = 10^{\,c\cdot t\cdot p} = (10^c)^{\,t\cdot p}$

Bezeichne $10^c = \ell$

$Q(t,p) = \ell^{\,t\cdot p}$

$Q(1,1) = \ell^{1\cdot 1} = \ell.$ †

## 1.5 Bestimmung von $\ell$

38 Satz 1-18 (Ungleichung von Bernoulli)

Voraussetzung:

Sei $x > -1$ und $n \in \mathbb{N}$

Behauptung:

Dann gilt $(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x$

39 Beweis: †

Für $n = 1$ ist die Ungleichung trivialerweise korrekt:

$(1+x)^1 \geq 1 + 1 \cdot x$

Wir zeigen, wenn die Ungleichung für $n \in \mathbb{N}$ stimmt, so auch für $n+1$. Da die Ungleichung also für $n = 1$ stimmt, stimmt sie dann auch für $n = 2$ und dann auch für $n = 3$ und für $n = 4$ usw.

Sei also $(1+x)^n \geq (1+nx)$.

$(1+x)^n \geq (1+nx) \quad \big| \cdot (1+x) > 0$

$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx) \cdot (1+x)$

$(1+x)^{n+1} \geq 1 + x + nx + x^2$

$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x + \underbrace{x^2}_{\geq 0}$

$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$ †

40 Satz 1-19 (Fazit)

Behauptung:

Die Folge $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ steigt monoton gegen den Grenzwert $\ell$.

Die Folge $b_n = \dfrac{1}{(1 - \frac{1}{n})^n}$ fällt monoton gegen den Grenzwert $\ell$.

$\ell = 2.718281828\ldots =$ die Eulersche Zahl $e$

Es ergibt sich $K(t,p) = K_0 \cdot Q(t,p) = k_0 \cdot e^{t \cdot p}$

41 Beweis: †

Sätze 1-13 und 1-14 liefern.

$$(1 + \frac{1}{n})^n < Q(1,1) < \frac{1}{(1 - \frac{1}{n})^n}$$

$$(\frac{n+1}{n})^n < Q(1,1) < \frac{1}{(\frac{n-1}{n})^n}$$

$$a_n = (\frac{n+1}{n})^n < \ell < (\frac{n}{n-1})^n = b_n$$

42 Die untere Grenze $a_n$ ist monoton wachsend:

Wir zeigen $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$= \frac{(\frac{n+2}{n+1})^{n+1}}{(\frac{n+1}{n})^n}$$

$$= \frac{(\frac{n+2}{n+1})^{n+1}}{(\frac{n+1}{n})^{n+1}} \cdot \frac{n+1}{n}$$

$$= (\frac{(n+2)\cdot n}{(n+1)^2})^{n+1} \cdot (\frac{n+1}{n})$$

$$= (1 - \frac{1}{(n+1)^2})^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n}$$ | Satz 1-18

$$\geq (1 - \frac{1}{n+1}) \cdot \frac{n+1}{n} = 1$$

43 Die obere Grenze $b_n$ ist monoton fallend:

Wir zeigen $\frac{b_n}{b_{n+1}} \geq 1$

$$\frac{b_n}{b_{n+1}}$$

$$= \frac{(\frac{n}{n-1})^n}{(\frac{n+1}{n})^{n+1}}$$

$$= \frac{(\frac{n}{n-1})^{n+1}}{(\frac{n+1}{n})^{n+1}} \cdot \frac{n-1}{n}$$

$$= (\frac{n^2}{(n+1)\cdot(n-1)})^{n+1} \cdot (\frac{n}{n-1})$$

$$= (1 + \frac{1}{n^2-1})^{n+1} \cdot \frac{n}{n-1}$$ | Satz 1-18

$$\geq (1 + \frac{n+1}{n^2-1}) \cdot \frac{n}{n-1}$$

$$\geq (1 + \frac{1}{n-1}) \cdot \frac{n}{n-1} \quad = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n}{n-1} = 1$$

44 Der Abstand der beiden Grenzen geht gegen 0.

$$b_n - a_n = \frac{b_n - a_n}{b_n} \cdot b_n = (1 - \frac{a_n}{b_n}) \cdot b_n$$

$$\leq (1 - \frac{(\frac{n+1}{n})^n}{(\frac{n}{n-1})^n}) \cdot 4$$

$$= (1 - (\frac{n^2-1}{n^2})^n) \cdot 4$$

$$= (1 - (1 - \frac{1}{n^2})^n) \cdot 4 \qquad \text{| Satz 1-18}$$

$$\leq (1 - (1 - \frac{n}{n^2})) \cdot 4$$

$$\leq (1 - (1 - \frac{1}{n})) \cdot 4 = \frac{4}{n}$$

45 Wertetabelle

| $n$ | $(\frac{n+1}{n})^n \leq \ell \leq (\frac{n}{n-1})^n$ |
|---|---|
| 2 | $2.25000000 \leq \ell \leq 4.00000000$ |
| 3 | $2.37037037 \leq \ell \leq 3.37500000$ |
| 4 | $2.44140625 \leq \ell \leq 3.16049383$ |
| 5 | $2.48832000 \leq \ell \leq 3.05175781$ |
| 6 | $2.52162637 \leq \ell \leq 2.98598400$ |
| 7 | $2.54649970 \leq \ell \leq 2.94189743$ |
| 8 | $2.56578451 \leq \ell \leq 2.91028537$ |
| 9 | $2.58117479 \leq \ell \leq 2.88650758$ |
| 10 | $2.59374246 \leq \ell \leq 2.86797199$ |
| 20 | $2.65329771 \leq \ell \leq 2.78950982$ |
| 30 | $2.67431878 \leq \ell \leq 2.76501636$ |
| 40 | $2.68506384 \leq \ell \leq 2.75305807$ |
| 50 | $2.69158803 \leq \ell \leq 2.74597270$ |

| $n$ | $(\frac{n+1}{n})^n \leq \ell \leq (\frac{n}{n-1})^n$ |
|---|---|
| 60 | $2.69597014 \leq \ell \leq 2.74128585$ |
| 70 | $2.69911637 \leq \ell \leq 2.73795590$ |
| 80 | $2.70148494 \leq \ell \leq 2.73546811$ |
| 90 | $2.70333246 \leq \ell \leq 2.73353886$ |
| 100 | $2.70481383 \leq \ell \leq 2.73199903$ |
| 200 | $2.71151712 \leq \ell \leq 2.72510883$ |
| 300 | $2.71376516 \leq \ell \leq 2.72282619$ |
| 400 | $2.71489174 \leq \ell \leq 2.72168749$ |
| 500 | $2.71556852 \leq \ell \leq 2.72100510$ |
| 600 | $2.71602005 \leq \ell \leq 2.72055053$ |
| 700 | $2.71634274 \leq \ell \leq 2.72022600$ |
| 800 | $2.71658485 \leq \ell \leq 2.71998270$ |
| 900 | $2.71677321 \leq \ell \leq 2.71979352$ |
| 1000 | $2.71692393 \leq \ell \leq 2.71964222$ |

46 $\ell$ ist die Eulersche Zahl (benannt nach Leonhard Euler 1708-1783).

Sie wird mit $e$ bezeichnet.

$e = 2.71828182845904523536\ldots$

$e$ ist eine irrationale Zahl. Also $e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Es gilt $K(t,p) = K_0 \cdot Q(t,p) = K_0 \cdot e^{p \cdot t}$ †