

WEBER, Christof; BRUCKMAIER, Georg & HOMBERGER, Max
Luzern, Windisch und Basel (Schweiz)

Strukturieren von Gleichungen und ihr effizientes Lösen: Zwei Eye-Tracking-Studien

Das Lösen von Gleichungen stellt eine zentrale, aber anspruchsvolle Tätigkeit dar. Zur empirischen Untersuchung von *Strukturierungsprozessen* wurden Blickverläufe von Lehramtsstudent*innen und von Gymnasiast*innen erhoben, während sie Gleichungen bearbeiteten. Im Zentrum des Beitrags steht die Frage, inwiefern die Methode des Eye-Trackings dazu geeignet ist, Unterschiede in der Strukturierung von Gleichungen sichtbar zu machen.

Theoretischer Hintergrund: Zum Lösen von Gleichungen

Aus einer semiotisch-pragmatischen Perspektive wird in diesem Beitrag davon ausgegangen, dass Gleichungen keine objektiv gegebene Struktur besitzen, sondern ihre Struktur erst durch die interpretative Tätigkeit der lösenden Person entsteht. Dieser als *Strukturierung* bezeichnete Prozess umfasst nach Rüede (2015) die Identifikation relevanter Teilterme sowie deren relationale Verknüpfung. So kann eine Gleichung wie $x - 3(x + 1) = 7 - 3(x + 1)$ (Hämmerle et al., 2018) mithilfe verschiedener Lösungsstrategien bearbeitet werden, die sich in ihrer *Effizienz* unterscheiden: (A) Das Ausmultiplizieren von $3(x + 1)$ auf beiden Seiten und Vereinfachen der Gleichung, oder (B) das Addieren von $3(x + 1)$ auf beiden Seiten der Gleichung. Strategie (B) erfordert weniger Rechenschritte und beruht auf einer anderen gedanklichen Strukturierung: Während die Standardstrategie (A) den Faktor 3 jeweils in Beziehung zum Teilterm $(x + 1)$ setzt, stellt die aufgabenangemessene und effiziente Strategie (B) eine Relation zwischen den beiden Termen $3(x + 1)$ beiderseits des Gleichheitszeichens her. In Anlehnung an Baroody (2003) verfügen Personen, die solche aufgabenspezifischen Merkmale gezielt aufgreifen, über *adaptive Expertise*, wohingegen *Routine-Expertise* durch den bevorzugten Einsatz von Standardstrategien gekennzeichnet ist.

Eye-Tracking-Studie 1: Adaptive vs. routinierte Expert*innen

Methode: Für die erste explorative Studie (Weber et al., 2025) wurden sieben Lehramtsstudierende mit Bestnoten in ihrer Mathematik-Matura ausgewählt. Diese Expert*innen bearbeiteten lineare (vgl. oben) und quadratische Gleichungen (z. B. $(x - 3)(x + 5) = 0$), die jeweils einen effizienteren Lösungsweg als die Standardstrategie erlaubten. Die Gleichungen wurden auf einem Monitor präsentiert und ohne Zeitvorgabe sowie ohne Hilfsmittel im Kopf gelöst; die Blickbewegungen wurden von einem fest installierten Eye-Tracker (SR Research Eyelink 1000; Abtastrate 500 Hz) aufgezeichnet.

Zur Datenauswertung wurden, in Übereinstimmung mit der semiotisch-pragmatischen Perspektive, Blickwechsel zwischen Teiltermen einer Gleichung als empirische Hinweise auf Strukturierungsprozesse interpretiert – und nicht als direkte Abbildungen kognitiver Prozesse. Dazu wurden die erhobenen Eye-Tracking-Daten mittels *Fixationssequenz-Diagrammen* (siehe Abb. 1 und 2) visualisiert, die die zeitliche Abfolge von Fixationen wiedergeben.

Erste Ergebnisse: Unter Einbezug der Interviewdaten konnten für das Lösen der Gleichung $x - 3(x + 1) = 7 - 3(x + 1)$ zwei idealtypische Blickmuster rekonstruiert werden, eines für adaptive Expert*innen (Beispiel „Claudia“) und eines für routinierte Expert*innen (Beispiel „Indira“).

Beispiel adaptive Expertin: Claudia löste die Gleichung in rund sechs Sekunden und beschrieb retrospektiv, die effiziente Strategie (B) benutzt zu haben. Ihr Blickverlauf bestand aus 39 Fixationen (Dauer max. 350 ms, siehe Abb. 1). Er begann in einem zentralen Bereich der Gleichung und war durch häufige Wechsel zwischen linker und rechter Gleichungsseite gekennzeichnet; insgesamt traten sieben Seitenwechsel auf. Bereits zu Beginn richtete Claudia ihren Blick vor allem auf die Operatoren.

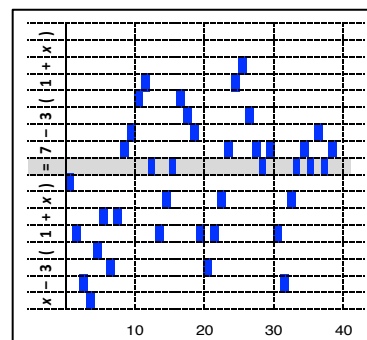


Abb. 1: Typischer Blickverlauf von adaptiven Expert*innen

Beispiel Routineexpertin: Indira benötigte 63 Sekunden zur Lösung der Gleichung und berichtete retrospektiv, die Terme $3(x + 1)$ je schrittweise ausmultipliziert zu haben, bevor sie die Variable x auf beiden Seiten zu isolieren versuchte. Ihr Blickverlauf umfasste 150 Fixationen (max. 2 s, Abb. 2). Er begann links in der Gleichung und zeigte eine phasenweise Fokussierung auf jeweils eine Seite der Gleichung. Insgesamt traten nur drei Seitenwechsel auf. In allen Phasen fixierte Indira sowohl Operatoren als auch Operanden.

Interpretation: Adaptive Expert*innen (wie Claudia) zeigen wenige und kurze Fixationen. Ihre Blickverläufe deuten auf eine integrative Verarbeitung der Gleichung hin, bei der auch über das Gleichheitszeichen hinaus Beziehungen zwischen Teiltermen hergestellt werden. Dieses wird nicht trennend, sondern als Teil der Gesamtstruktur wahrgenommen, was einen zügigen Lösungsprozess begünstigt. Routineexpert*innen (wie Indira) hingegen weisen mehr und längere Fixationen auf, die eine tendenziell lokale, sequenzielle Verarbeitung nahelegen. Das Gleichheitszeichen übernimmt hier eine gliedernde Funktion, erkennbar an der isolierten Bearbeitung der beiden Seiten. Dies geht mit einer hohen kognitiven Belastung sowie einem zeitaufwändigen und fehleranfälligen Lösungsprozess einher.

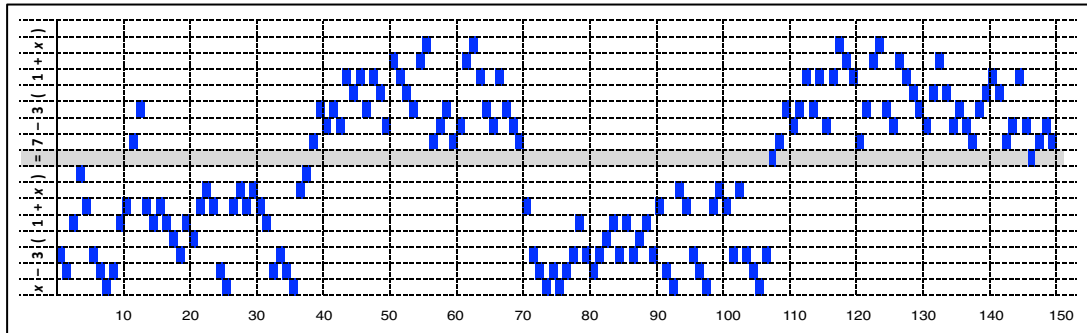


Abb. 2: Typischer Blickverlauf von routinierten Expert*innen

Eye-Tracking-Studie 2: Praktisch vs. potenziell flexible Schüler*innen

Methode: Die zweite explorative Studie (Homburger, 2025) verfolgte einen kontrastiven Zugang mit 14 Gymnasiast*innen einer 10. Klasse, die im Vorfeld einen Test mit neun linearen Gleichungen (nach Xu et al., 2017) absolvierten. Auf dieser Grundlage wurden vier Schüler*innen ausgewählt. Zwei erzielten im Test die höchsten Werte im spontan aufgabenangemessen und effizienten Lösen der Gleichungen („S1“ und „S12“: mit Xu et al. (2017) *praktisch flexibel*), die beiden anderen die höchsten Werte im Nennen alternativer Lösungsstrategien ohne spontane Nutzung („S6“ und „S7“: *potenziell flexibel*). Für die Studie bearbeiteten beide Gruppen sechs lineare Gleichungen, die auf einem Monitor präsentiert wurden und ohne Hilfsmittel im Kopf zu lösen waren. Die Augenbewegungen wurden mit einem fest installierten Eye-Tracker (Gazepoint GP3-HD; Abtastrate 150 Hz) aufgezeichnet.

Erste Ergebnisse: Für effizient lösbare Gleichungen wie z. B. $7(x - 2) = 3(x - 2) + 16$ konnten – trotz Einbezug der Interviewdaten – keine idealtypischen, sondern lediglich vergleichbare Blickverläufe in beiden Gruppen rekonstruiert werden (Abb. 3). Weder die Bearbeitungsdauer noch die Anzahl Fixationen unterschieden sich statistisch signifikant, und die visuelle Aufmerksamkeit richtete sich bei beiden Gruppen überwiegend auf die Operanden. Wenn Gleichungen effizient gelöst wurden, traten vermehrt Blickwechsel zwischen Gleichheitszeichen und relevanten Operatoren auf.

Interpretation: Die erwarteten Unterschiede zwischen praktisch und potenziell flexiblen Schüler*innen ließen sich in den Blickverläufen nicht bestätigen. Dies könnte darauf hindeuten, dass sich Unterschiede im Lösungsverhalten auf dieser Lernstufe noch nicht in unterscheidbaren Blickmustern manifestieren. Zudem legen die Ergebnisse nahe, dass eine erhöhte Anzahl an Blickwechseln weniger mit der Gruppenzugehörigkeit als mit der tatsächlichen Nutzung effizienter Lösungsstrategien zusammenhängt: Lösten potenziell flexibel eingestufte Lernende die vorgelegten Gleichungen effizient, zeigten sie vergleichbare Blickverläufe wie praktisch flexible Lernende.

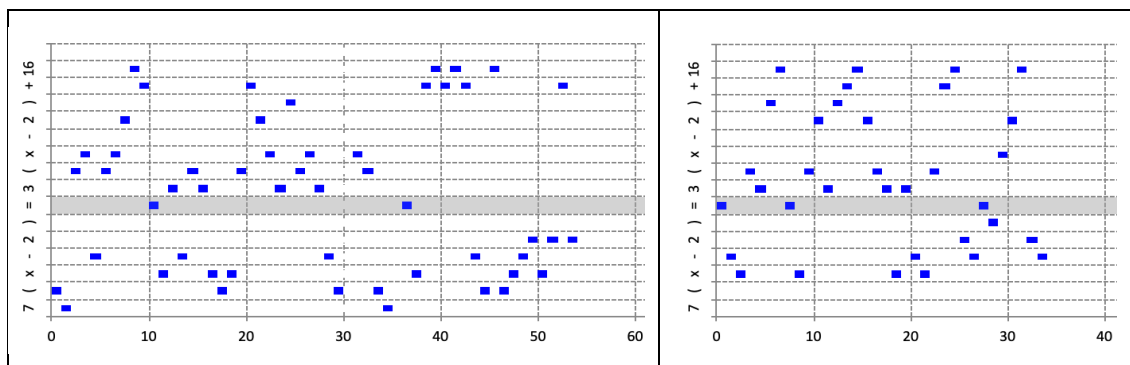


Abb. 3: Blickverläufe von Schüler*innen S1 (praktisch flexibel, links) und S6 (potenziell flexibel, rechts) beim effizienten Lösen der Gleichung $7(x - 2) = 3(x - 2) + 16$

Fazit

Die beiden Eye-Tracking-Studien verdeutlichen, dass Strukturierungsprozesse beim Lösen algebraischer Gleichungen eine zentrale Rolle für den aufgabenangemessenen Einsatz von Lösungsstrategien spielen. Bei Lehramtsstudierenden konnten unterschiedliche Blickmuster rekonstruiert werden, die auf *global-integrative* beziehungsweise *lokal-sequenzielle* Formen der Strukturierung hinweisen. Demgegenüber ließen sich bei Schüler*innen keine stabilen gruppenspezifischen Blickverläufe rekonstruieren, was auf eine situationsabhängige Ausprägung solcher Prozesse hindeutet. Insgesamt zeigen die Befunde das Potenzial von Eye-Tracking, Strukturierungsprozesse sichtbar zu machen, sofern Blickdaten durch Interviewdaten gerahmt interpretiert werden. Für den Mathematikunterricht ergibt sich daraus die Aufgabe, geschicktes Strukturieren gezielt zu thematisieren und zu fördern.

Literatur

- Baroody, A. (2003). The development of adaptive expertise and flexibility. In A. J. Baroody & A. Dowker (Eds.), *The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise* (pp. 1–33). Lawrence Erlbaum Associates.
- Hämmerle, C., Rüede, C. & Staub, F. (2018). Zwei Lösungswege für eine Gleichung – Wozu eigentlich? Aus der laufenden Studie ‘MathFlex’. *VSM Bulletin*, 137, 28–31.
- Homberger, M. (2025). *Rekonstruktion des Strukturierens von linearen Gleichungen mittels Eye-Tracking und die Untersuchung des Zusammenhangs mit prozeduraler Flexibilität*. [Unveröffentlichte Masterarbeit, Universität Basel].
- Rüede, C. (2015). *Strukturierungen von Termen und Gleichungen: Theorie und Empirie des Gebrauchs algebraischer Zeichen durch Experten und Novizen*. Springer.
- Weber, C., Bruckmaier, G. & Vogel, M. (2025). Experts’ structuring processes of equations that can be solved with varying efficiency: An analysis of gaze paths with eye-tracking. In G. Bolondi, & M. Gaidoschik (Eds.), *Proceedings of the 14th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 598–605). ERME.
- Xu, L., Liu, R., Star, J., Wang, J., Liu, Y. & Zhen, R. (2017). Measures of Potential Flexibility and Practical Flexibility in Equation Solving. *Frontiers in Psychology*, 8, 1368.