Christian RÜEDE, Pädagogische Hochschule Nordwestschweiz

Gleichungen flexibel lösen – und zwar von Anfang an

Flexibles Rechnen ist ein weithin anerkanntes Ziel des Arithmetik-Unterrichts der Grundschule, zumal dadurch die Ablösung von zählendem Rechnen besser gelingt (Rechtsteiner-Merz, 2013). Die Diskussion um die *Flexibilität in der Algebra* (Sekundarstufe) hingegen steht erst in ihren Anfängen, ausgelöst durch die Arbeiten von Rittle-Johnson und Star (2007). Diese Autoren zeigen: a) flexibles Gleichungslösen kann gezielt gefördert werden (durch das Angebot von Gleichungen, bei denen sich unterschiedliche Vorgehensweisen anbieten), b) die Schülerleistung nimmt am meisten zu, wenn die Flexibilität von Anfang an gezielt aufgebaut wird (und nicht zuerst das Standardverfahren geübt wird und erst dann alternative Lösungswege angesprochen werden) (Rittle-Johnson, Star & Durkin, 2012). Auch wenn es sich dabei um laborartige und kurzzeitige Studien handelt, stellt sich die Frage: Wie lässt sich aus Sicht der Theorie erklären, dass der Ansatz „Flexibilität von Anfang an" effektiver sein kann als der Ansatz „zuerst Standardverfahren, dann Flexibilität" (traditioneller Unterricht)?

1. Das Gleichungslösen in der Literatur

Die Algebradidaktik fokussierte bis in die 1980-er Jahre auf die Analyse von Verfahren zur Lösung von Gleichungen oder Vereinfachung von Termen: Welche Verfahren verwenden Schülerinnen und Schüler? Wie regulieren sie deren Ausführung? Erst ab den 1990-er Jahren wurden interpretative Prozesse in den Blick genommen. Neben der Frage, wie jemand umformt, wurde zunehmend die Frage gestellt, wie die vorzunehmende Umformung erkannt wird. Kieran (1989) führte den Begriff der *Struktur einer Gleichung* ein zur Beschreibung von Deutungen, die mit dem Erkennen der Umformung verbunden sind. Um die Jahrtausendwende stellte sich die Einsicht ein, dass derartige Strukturen nicht so sehr spontan gesehen als vielmehr aktiv konstruiert werden. Linchevski und Livneh (1999) führen aus diesem Grund den Begriff des *Struktursinns* ein, um die multiplen Strukturen zu betonen, die beim Umgang mit Termen und Gleichungen flexibel gehandhabt und generiert werden müssen. Schließlich wird in Rüede (2015) argumentiert, dass Strukturieren als Handeln begriffen werden kann. Zusammengefasst sind beim Gleichungslösen zwei Typen von Handlungen wichtig: Umformen und Strukturieren. Entsprechend sind beim *Gleichungslösen mit multiplen Lösungswegen* sowohl multiple Verfahren als auch multiple Strukturen verbunden.

In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (S. x–y). Münster: WTM-Verlag

2. Flexibilität beim Gleichungslösen

Das in diesem Beitrag verwendete Konzept der Flexibilität orientiert sich an den Arbeiten von Rittle-Johnson, Star und Durkin (2012). Flexibilität beim Gleichungslösen meint daher sowohl ein Wissen über multiple Vorgehensweisen als auch das Können, bei einer gegebenen Gleichung spontan ein optimales Verfahren anzuwenden. Das bedingt, dass bei einer vorgegebenen Gleichung mehrere Verfahren und damit mehrere Strukturen aktiviert werden können. Wesentlich wird das Wechseln zwischen Strukturen und damit das Umstrukturieren. Umformen und Umstrukturieren sind die zentralen Handlungen in punkto Flexibilität beim Gleichungslösen.

Um unterschiedliche Strukturen einer Gleichung darstellen zu können, werden in diesem Beitrag Graufärbungen verwendet. Zur Illustration dieses Ansatzes sei die Gleichung 4 (3*x* + 1) = 100 – 6 (3*x* + 1) aufgegriffen, eine Gleichung, die unterschiedlich strukturiert werden kann. **4** (***3x*** + 1) = 100 – 6 (3*x* + 1) stelle die Struktur dar, die mit der Ausmultiplikation verbunden ist. In diesem Fall fokussieren viele Schüler einfach auf die ersten Terme links, da sie diese als erstes miteinander multiplizieren. Daher sind die 4 und die 3*x* hier fett dargestellt. Die restlichen Zeichen sind grau, weil diese für sie vorerst uninteressant sind. **4 (**3*x* + 1**)** = 100 **– 6 (**3*x* + 1**)** hingegen stehe für die Zusammenfassung der gleichen Klammerterme 4 (3*x* + 1) und 6 (3*x* + 1), was zu 10 (3*x* + 1) = 100 führt. Für diese Umformung ist die Gleichung 4 (3*x* + 1) = 100 – 6 (3*x* + 1) als dreigliedrig anzuschauen (4 (3*x* + 1) links, 100 rechts, und 6 (3*x* + 1) rechts), was mit den entsprechenden Färbungen ausgedrückt werden soll. Wichtig ist hier nicht, ob die jeweilige Graufärbungen die intendierte Sichtweise tatsächlich optimal zum Ausdruck bringt, sondern vielmehr, dass es sich bei den beiden Strukturen **4** (***3x*** + 1) = 100 – 6 (3*x* + 1) und **4 (**3*x* + 1**)** = 100 **– 6 (**3*x* + 1**)** um zwei unterschiedliche Sichtweisen auf ein und dieselbe Zeichenreihe handelt. Wer über Flexibilität beim Gleichungslösen verfügt, kann beide Strukturen herstellen und die damit verbundenen Verfahren ausführen.

3. Gleichungslösen als Umformen und Umstrukturieren

Zu klären bleibt, wie die beiden Handlungstypen des Umformens und Umstrukturierens beim Gleichungslösen zusammenspielen. In Abbildung 1 ist ein Vorschlag dargestellt. Jede Umformung verbindet unterschiedliche Ausdrücke, die Umstrukturierung verbindet unterschiedliche Strukturen des gleichen Ausdrucks. Die Abbildung macht deutlich, dass man sich beim Gleichungslösen immer mit den Strukturen der Gleichung beschäftigt. Beginnend bei der Struktur der Ausgangsgleichung kann man eine andere

Struktur herstellen (Umstrukturieren) oder einen Verfahrensschritt ausführen (Umformen).

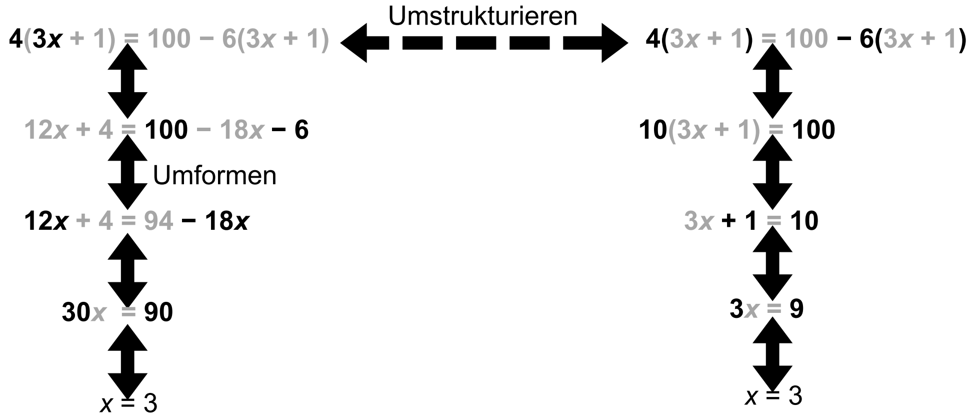

Abb. 1: Modellierung des Gleichungslösens anhand der Gleichung 4 (3*x* + 1) = 100 – 6 (3*x* + 1). Strukturen sind durch Graufärbungen dargestellt. Der gestrichelte Querpfeil stellt das Umstrukturieren dar, die anderen Pfeile stehen für Umformungen.

Das Objekt „Gleichung“ (bezeichnet mit „$4\ (3x + 1) = 100 - 6\ (3x + 1)$“) wird durch die Handlungen des Umformens und Umstrukturierens von den Lernenden erst konstruiert, und seine Generierung gründet wesentlich auf der Handlung des Umstrukturierens (Rüede, 2015). Denn erst durch die Umstrukturierung stellen die Lernenden einen Zusammenhang zwischen den beiden Strukturierungen her, indem sie beispielsweise erfahren, dass beide zum gleichen Resultat führen, oder sie interpretieren die gegebene Struktur Schritt um Schritt zu einer anderen Struktur um (für ein Beispiel vgl. Rüede 2015, S. 145 ff.). Sie realisieren, dass **4** (**3*x*** + 1) = 100 – 6 (3*x* + 1) und **4** (3*x* + 1**)** = 100 **– 6** (3*x* + 1**)** beide auf dasselbe referieren. Dieses „dasselbe“ ist die Gleichung als Objekt. Dieses Objekt kann formal als Kombination der beiden Strukturierungen (inklusive der sich daraus je ergebenden Umformungen) aufgefasst werden. In diesem Sinne ermöglichen erst die Handlungen des Umstrukturierens, den Ausdruck $4\ (3x + 1) = 100 - 6\ (3x + 1)$ als Repräsentation eines Objekts zu behandeln.

Die hier vorgestellte Modellierung des Gleichungslösens lässt sich in einen inferentialistischen Rahmen einbetten (Rüede, 2015). Die Umstrukturierungen entsprächen *repräsentationalen* Verbindungen (Inferenzen). Sie verbinden Strukturierungen desselben Ausdrucks. Die Umformungen hingegen würden als *transformationale* Verbindungen bezeichnet, sie verbinden Strukturierungen unterschiedlicher Ausdrücke (Abb. 2).

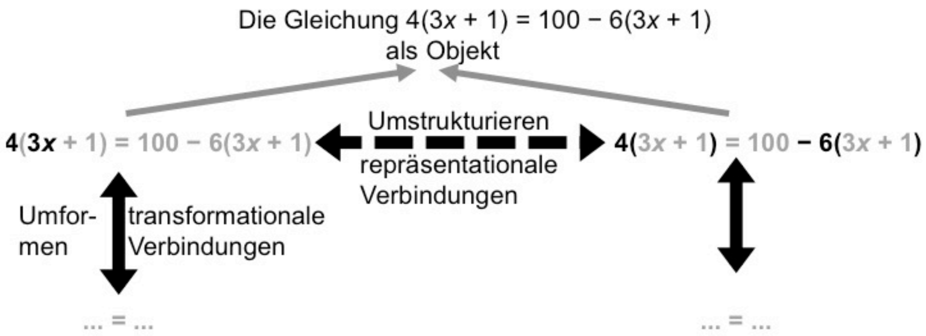

Abb.2: Konstruktion eines Objekts basierend auf Handlungen des Umstrukturierens (und Umformens)

4. Konsequenzen

Obige Modellierung des flexiblen Gleichungslösens zeigt einen Zusammenhang zwischen Unterrichtskonzept und Wissensaufbau beim Gleichungslösen auf. Beim Unterrichtsansatz „Flexibilität von Anfang an“ werden ab Beginn Gleichungen angeboten, bei denen sich multiple Verfahren anbieten. Konsequenterweise formen Schülerinnen und Schüler nicht nur um, sondern strukturieren auch um (Herstellung transformationaler und repräsentationaler Verbindungen). Beim Unterrichtsansatz „zuerst Standardverfahren, dann Flexibilität“ dominieren Umformungen (transformationale Verbindungen), weil vor allem das Standardverfahren geschult wird. Üblicherweise legen die in diesem Unterrichtsansatz angebotenen Gleichungen auch keine alternativen Verfahren nahe. Die Schülerinnen und Schüler tendieren dazu, die Gleichung im Wesentlichen bloß als ein Verfahren (und zwar als das Standardverfahren) zu begreifen.

Literatur

Kieran, C. (1989). The Early Learning of Algebra: A Structural Perspective. In S. Wagner & C. Kieran (Hrsg.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra* (S. 33–56). Hillsdale: Erlbaum.

Linchevski, L. & Livneh, D. (1999). Structure sense: The Relationship Between Algebraic and Numerical Contexts. *Educational Studies in Mathematics, 40*(2), 173–199.

Rechtsteiner-Merz, C. (2013). *Flexibles Rechnen und Zahlenblickschulung*. Münster: Waxmann.

Rittle-Johnson, B. & Star, J. R. (2007). Does Comparing Solution Methods Facilitate Conceptual and Procedural Knowledge? An Experimental Study on Learning to Solve Equations. *Journal of Educational Psychology, 99*(3), 561–574.

Rittle-Johnson, B., Star, J. R. & Durkin, K. (2012). Developing Procedural Flexibility. Are Novices Prepared to Learn form Comparing Procedures? *British Journal of Educational Psychology, 82*, 436–455.

Rüede, C. (2015). *Strukturierungen von Termen und Gleichungen*. Wiesbaden: Springer.